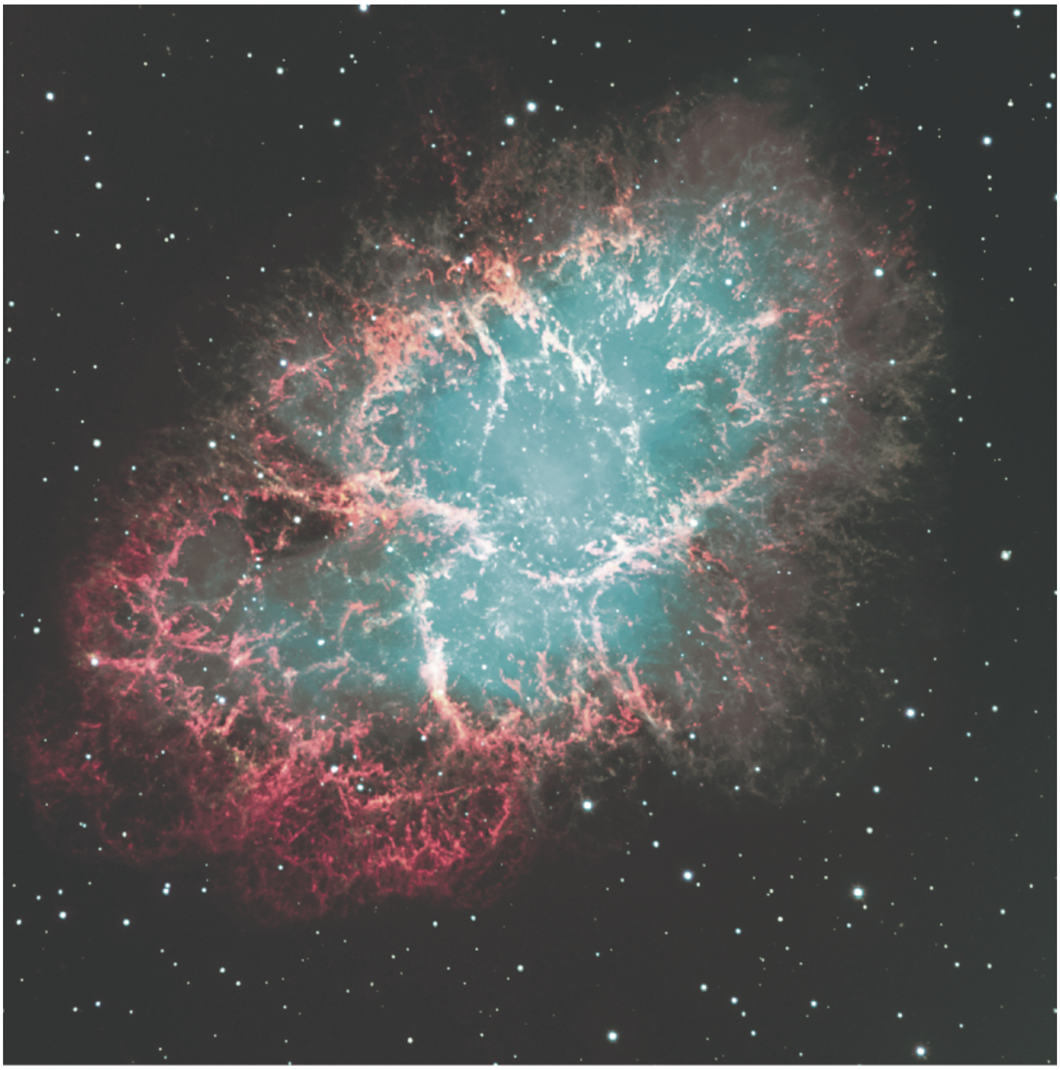


The Crab Nebula in Taurus (VLT KUEYEN + FORS2)

ESO PR Photo 40f/99 (17 November 1999)

© European Southern Observatory

G Von der Speziellen zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Ausgehend von der rätselhaften Tatsache, dass sich die träge und die schwere Masse experimentell nicht unterscheiden lassen, lernen wir Einsteins Schlüssel zum Einbau der Gravitation in die Relativitätstheorie kennen: Das Äquivalenzprinzip. Dann klären wir genau, für welchen einfachen, aber sehr wichtigen Fall wir die quantitativen Auswirkungen beschreiben werden. Im vierten Abschnitt studieren wir, welchen Einfluss die Gravitation auf 'Uhren und Massstäbe' hat, so wie wir im Kapitel **B** den Einfluss einer Relativgeschwindigkeit auf das Ergebnis von Längen- und Zeitmessungen studiert haben. Im Fall relativ schwacher Gravitationsfelder können wir die korrekten Formeln herleiten. Dass diese allgemein gültig sind für nicht rotierende kugelförmige Massen, also für die Schwarzschild-Lösung der Einstein'schen Gleichungen, ist zwar richtig, aber wir können es nicht begründen. Aus unseren Formeln können wir weiter ableiten, wie sich Geschwindigkeiten transformieren zwischen Beobachtern, die 'unterschiedlich tief in ein Gravitationsfeld eingetaucht sind'. Dies führt zur Erkenntnis, dass für einen entfernten Beobachter die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum nicht mehr überall dieselbe ist!

G1 Eine seltsame experimentelle Tatsache

Was ist schwerer - ein Kilogramm Blei oder ein Kilogramm Federn? [28-195f] Die Antwort auf diese vermeintliche Scherzfrage ist keineswegs selbstverständlich. Newton war vielleicht der erste, der sich darüber gewundert hat, dass sich die träge und die schwere Masse experimentell nicht unterscheiden lassen (siehe Zitat p.7 in **A1**). In einer Serie von Pendelversuchen ist er der Sache eigenhändig nachgegangen und hat festgestellt, dass die beiden Grössen einander proportional sind. Es ist aber nur eine Frage der Definition der Einheiten für die Masse und die Kraft, um aus der Proportionalität eine Gleichheit zu machen.

Im Abschnitt **F1** haben wir auf p.84 fast beiläufig bemerkt, dass wir es im Prinzip sogar mit *drei* verschiedenen Konzepten von 'Masse' zu tun haben:

- Masse als 'träge Masse', welche einer Impulsänderung einen Widerstand entgegensetzt
- Masse als 'schwere Masse', auf die in einem Gravitationsfeld eine Kraft wirkt
- Masse als 'gravitierende Masse', welche selber ein Gravitationsfeld erzeugt

Dass die 'felderzeugende' Masse mit der 'felderleidenden' gleichgesetzt werden kann hat eigentlich nie Aufsehen erregt. Dass aber die *träge* und die *schwere* Masse identisch sein sollen hat keine logische Grundlage und wurde deshalb immer wieder experimentell getestet. Die Genauigkeit, die Newton mit seinen Pendelversuchen erzielte, lag etwa bei 1:1000. Wohl angestossen durch die Überlegungen von Ernst Mach hat der ungarische Baron Loránd von Eötvös ab 1899 Präzisionsexperimente zu dieser Frage ausgeführt. Er konnte dabei die Genauigkeit von Newton um viele Zehnerpotenzen übertreffen. Eine weitere deutliche Steigerung gelang dann 1964 Robert H. Dicke und seinem Team. Wegen der fundamentalen Bedeutung dieser Experimente sollen die Angaben dazu aus dem 'Telefonbuch' [27-1050ff (!)] in einer kleinen Tabelle zusammengestellt werden. Ich nehme auch noch den Fallturm in Bremen hinzu, da dort erstmals nicht mehr Torsionskräfte gemessen werden, sondern direkt geprüft wird, ob wirklich alle Körper gleich schnell fallen. Seit 2005 kann dabei dank der neuen Katapultanlage eine Freifallzeit von etwa 9.5 Sekunden erzielt werden. Der zugehörige Weblink ist www.zarm.uni-bremen.de/index.htm .

wer	wann	wie genau
Newton	um 1680	$1 : 10^{3}$
Eötvös	1899 - 1922	$5 : 10^{9}$
Renner	1935	$7 : 10^{10}$
Dicke et al.	1964	$1 : 10^{11}$
Braginsky & Panov	1971	$1 : 10^{12}$
Fallturm in Bremen	1990 - heute	$1 : 10^{12}$

Misner et al. nennen dieses Faktum in [27] "the uniqueness of free fall" oder "the weak equivalence principle". Diese experimentelle Tatsache steht am Anfang jeder Theorie der Gravitation. Alle (kleinen) Testkörper fallen im Gravitationsfeld eines grossen Körpers genau gleich schnell, unabhängig von ihrer Zusammensetzung und ihrer Masse. Warum das so ist konnte Newton nicht beantworten und er wollte auch nicht darüber spekulieren ('hypotheses non fingo'). Eine gute Theorie der Gravitation muss aber auf diese Frage eine Antwort geben.

Ab 1906 hat Einstein an diesem Problem gearbeitet - und 1908 hat er erkannt, dass er es auf seine typische Art wohl am besten lösen kann.

http://www.einsteinjahr-bremen.de/FallturmBremen_Einsteinv1_300605.jpg
(der Link ist nicht mehr aktiv)

G2 Das Äquivalenzprinzip

Was macht Einstein, wenn zu einem experimentellen Ergebnis keine logische Erklärung gefunden werden kann? Er macht das zu erklärende Faktum zum Ausgangspunkt einer neuen Theorie! Die unerklärliche Konstanz der Lichtgeschwindigkeit hat er (mit Rückendeckung von Maxwell) einfach zum Prinzip erhoben und darauf die SRT begründet. Genauso packt er auch die Gravitation an - er macht aus der Gleichheit der schweren und der trägen Masse ein Axiom und erklärt:

1. Es lässt sich prinzipiell mit lokalen Experimenten nicht feststellen, ob ein Labor im Gravitationsfeld einer grossen Masse ruht und dort die Fallbeschleunigung **g** gemessen wird oder ob es gravitationsfrei der konstanten Beschleunigung **g** ausgesetzt ist.

Dieses Äquivalenzprinzip von Einstein ist so wichtig, dass wir es noch auf verschiedene andere Arten formulieren wollen (nach [27] müssten wir es das ‘starke Äquivalenzprinzip’ nennen):

2. Es gibt keine lokalen Experimente, die unterscheiden können, ob ein Labor in einem Gravitationsfeld frei fällt oder ob es unbeschleunigt in einem gravitationsfreien Raum ruht.

3. In einem homogenen Gravitationsfeld laufen alle Vorgänge genau gleich ab wie in einem gleichförmig beschleunigten, aber gravitationsfreien Bezugssystem.

4. Ein kleines, in einem Gravitationsfeld frei fallendes und nicht rotierendes Labor ist ein Inertialsystem im Sinne der SRT.

5. Die Wirkung einer Schwerkraft kann lokal durch eine passende Beschleunigung erzeugt oder aufgehoben werden.

In der dritten Formulierung ist die Forderung, dass die Experimente ‘lokal’ sein sollen, sich also nicht über ein ‘grosses’ Raumgebiet erstrecken sollen, ersetzt durch die Forderung, dass das Gravitationsfeld ‘homogen’ sein soll, was natürlich in allen Fällen auch nur in einem kleinen Raumgebiet in sehr guter Näherung gilt. Die dritte Formulierung hat Einstein selber in seiner populären Darstellung [29] der Relativitätstheorien derart plastisch ausgemalt, dass man an eine bewusste Bezugnahme auf die Schilderung der Phänomene im Schiffsbauch durch Galilei (siehe Zitat in **A2**) denken muss:

> “Wir denken uns ein geräumiges Stück leeren Weltraumes, so weit weg von Sternen und erheblichen Massen, dass wir mit hinreichender Genauigkeit den Fall vor uns haben, der im GALILEIschen Grundgesetz vorgesehen ist. Es ist dann möglich, für diesen Teil der Welt einen GALILEIschen Bezugskörper zu wählen, relativ zu welchem ruhende Punkte ruhend bleiben, bewegte dauernd in geradlinig gleichförmiger Bewegung verharren. Als Bezugskörper denken wir uns einen geräumigen Kasten von der Gestalt eines Zimmers; darin befinde sich ein mit Apparaten ausgestatteter Beobachter. Für diesen gibt es natürlich keine Schwere. Er muss sich mit Schnüren am Boden befestigen, wenn er nicht beim leisesten Stoss gegen den Boden langsam gegen die Decke des Zimmers entschweben will.
>
> In der Mitte der Kastendecke sei aussen ein Haken mit Seil befestigt und an diesem fange nun ein Wesen von uns gleichgültiger Art mit konstanter Kraft zu ziehen an. Dann beginnt der Kasten samt dem Beobachter in gleichförmig beschleunigtem Fluge nach “oben” zu fliegen. Seine Geschwindigkeit wird im Laufe der Zeit ins Phantastische zunehmen - falls wir all dies beurteilen von einem anderen Bezugskörper aus, an dem nicht mit einem Stricke gezogen wird.

Wie beurteilt aber der Mann im Kasten den Vorgang? Die Beschleunigung des Kastens wird vom Boden desselben durch Gegendruck auf ihn übertragen. Er muss also diesen Druck mittels seiner Beine aufnehmen, wenn er nicht seiner ganzen Länge nach den Boden berühren will. Er steht dann im Kasten genau wie einer in einem Zimmer eines Hauses auf unserer Erde steht. Lässt er einen Körper los, den er vorher in der Hand hatte, so wird auf diesen die Beschleunigung des Kastens nicht mehr übertragen; der Körper wird sich daher in beschleunigter Relativbewegung dem Boden des Kastens nähern. Der Beobachter wird sich ferner überzeugen, dass die Beschleunigung des Körpers gegen den Boden immer gleich gross ist, mit was für einem Körper er auch den Versuch ausführen mag.

Der Mann im Kasten wird also, gestützt auf seine Kenntnisse vom Schwerefelde ... zum Ergebnis kommen, dass er samt dem Kasten sich in einem ziemlich konstanten Schwerefelde befinde. Er wird allerdings einen Augenblick verwundert sein darüber, dass der Kasten in diesem Schwerefelde nicht falle. Da entdeckt er aber den Haken in der Mitte der Decke und das an demselben befestigte gespannte Seil, und er kommt folgerichtig zum Ergebnis, dass der Kasten im Schwerefelde ruhend aufgehängt sei.

Dürfen wir über den Mann lächeln und sagen, er befinde sich mit seiner Auffassung im Irrtum? Ich glaube, wir dürfen das nicht, wenn wir konsequent bleiben wollen, sondern wir müssen zugeben, dass seine Auffassungsweise weder gegen die Vernunft noch gegen die bekannten mechanischen Gesetze verstösst. Wir können den Kasten, wenn er auch gegen den zuerst betrachteten "GALILEIschen Raum" beschleunigt ist, dennoch als ruhend ansehen. Wir haben also guten Grund, das Relativitätsprinzip auszudehnen auf relativ zueinander beschleunigte Bezugskörper und haben so ein kräftiges Argument für ein verallgemeinertes Relativitätspostulat gewonnen.

Man beachte wohl, dass die Möglichkeit dieser Auffassungsweise auf der fundamentalen Eigenschaft des Schwerefeldes beruht, allen Körpern dieselbe Beschleunigung zu erteilen, oder, was dasselbe bedeutet, auf dem Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse. Würde dieses Naturgesetz nicht bestehen, so würde der Mann im beschleunigten Kasten das Verhalten der Körper seiner Umgebung nicht durch die Voraussetzung eines Gravitationsfeldes deuten können, und er wäre auf *Grund* keiner Erfahrung berechtigt, seinen Bezugskörper als einen "ruhenden" vorauszusetzen.

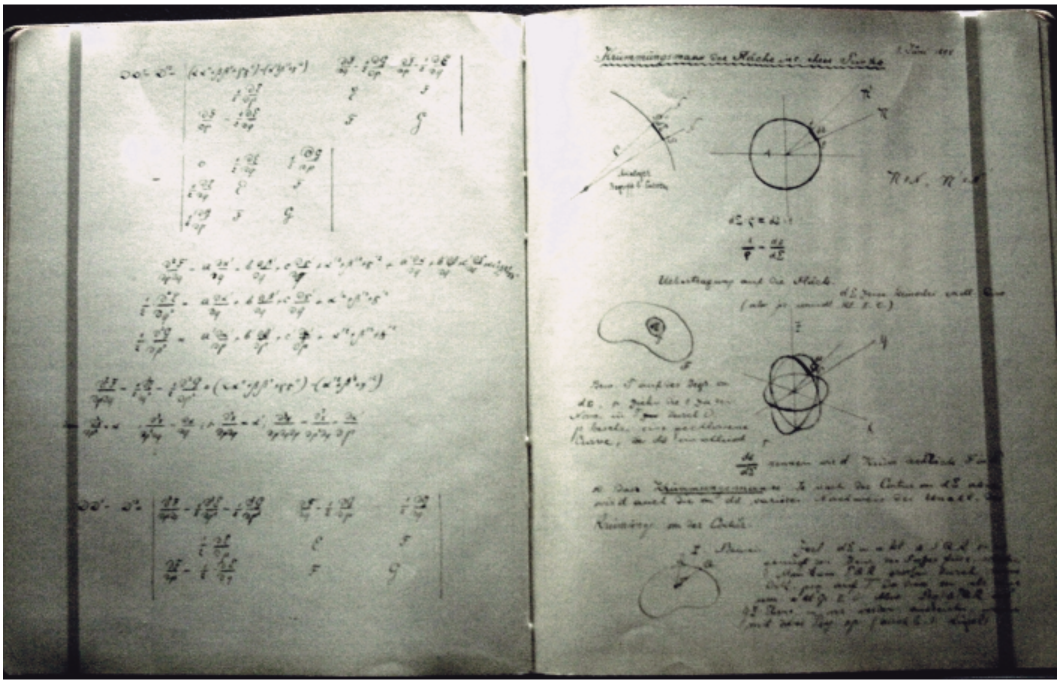
Der Mann im Kasten befestigte an der Innenseite der Kastendecke ein Seil und an dessen freiem Ende einen Körper. Durch diesen wird bewirkt werden, dass das Seil in gespanntem Zustande "vertikal" herabhängt. Wir fragen nach der Ursache der Spannung des Seils. Der Mann im Kasten wird sagen: "Der aufgehängte Körper erfährt in dem Schwerefeld eine Kraft nach unten, welcher durch die Seilspannung das Gleichgewicht gehalten wird; massgebend für die Grösse der Seilspannung ist die *schwere* Masse des aufgehängten Körpers." Andererseits wird aber ein Be[obachter], der frei im Raum schwebt, den Zustand so beurteilen: "Das Seil ist gezwungen, die beschleunigte Bewegung des Kastens mitzumachen und über-trägt diese auf den daran befestigten Körper. Die Seilspannung ist so gross, dass sie die Beschleunigung des letzteren gerade zu bewirken vermag. Massgebend für die Grösse der Spannung im Seile ist die *träge* Masse des Körpers." Wir sehen aus diesem Beispiele, dass unsere Erweiterung des Relativitätsprinzips den Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse als *notwendig* erscheinen lässt. Damit ist eine physikalische Interpretation dieses Satzes gewonnen." [29-43ff]

Vielleicht kann ich Sie mit diesem langen Zitat dazu anstiften, es selber mal mit einem der allgemein verständlichen Texte von Einstein zu versuchen. Natürlich gibt es auch viele Zeichnungen, Animationen, Videos und DVD's, welche diese Schilderung all denjenigen vor Augen führen, die sich diese Bilder bei der Lektüre nicht selber machen mögen. Sie sind alle nett oder gar lustig, schauen Sie sich ruhig einige davon an. Es ist amüsant, Professor Albert dabei zuzuschauen, wie er gemütlich samt Lift im freien Fall den Liftschacht hinuntersaust. Mich selber interessiert der Fallturm in Bremen, wo man sowas für einige Sekunden experimentell tatsächlich durchführen kann, viel mehr als diese Comiczeichnungen zu einem *Gedanken*experiment.

G3 Unsere Beschränkung auf einen wichtigen Spezialfall

Das (starke) Äquivalenzprinzip war für Einstein Ansatzpunkt und Nagelprobe für jede mathematische Formulierung einer Theorie der Gravitation. Dennoch kam er bis 1911 kaum richtig voran. 1912 kehrte er von Prag nach Zürich zurück und muss dort zu seinem Freund und Studienkollegen Marcel Grossmann, der inzwischen eine Professur an der ETH innehatte, gesagt haben: “Grossmann, Du musst mir helfen, sonst werd’ ich verrückt.” [7-213] Grossmann konnte ihm schnell helfen, und Einstein hat Mathe gebüffelt wie früher und später nie mehr. Schon bald fanden sie die richtigen Feldgleichungen - verwarfen sie aber wieder, weil sie meinten, dass sich in erster Näherung nicht die Newton’sche Theorie daraus ergäbe. Im Sommer 1915 (Einstein war schon über ein Jahr in Berlin) stellte Einstein seine ganzen Überlegungen und den Stand seiner Arbeiten in Göttingen David Hilbert und seinen Leuten vor. Am 4. November 1915 legte er der Preussischen Akademie eine weitere Abhandlung vor aus der Serie “Zur Allgemeinen Relativitätstheorie”. Eine Woche später musste er davon aber schon wieder einiges zurücknehmen. Am 25. November publizierte er schliesslich die endgültige Fassung seiner Gleichungen. Nun hat aber Hilbert schon am 20. November eine Arbeit zur Gravitation eingereicht, die allerdings erst am 31. März 1916 gedruckt erschien und ebenfalls die korrekten Gleichungen enthielt. Beinahe wäre es darüber noch zu einem unschönen Prioritätsstreit gekommen. Einige Unverbesserliche versuchen, diesen heute immer noch anzufachen, dabei weiss man seit 1997 definitiv, dass der Plagiatsvorwurf nur Hilbert treffen kann (siehe dazu [31-105ff]).

In einem Brief an Arnold Sommerfeld schrieb Einstein: “Denk Dir meine Freude ... , dass die Gleichungen die Perihel-Bewegung des Merkur richtig liefern!” Und an den Freund Paul Ehrenfest: “Ich war einige Tage fassungslos vor freudiger Erregung.” Einstein war aber auch völlig erschöpft und musste sich einige Wochen pflegen lassen.



Vorlesungs-Skript zur Differentialgeometrie von Marcel Grossmann.
Einstein schwänzte die Mathematik-Vorlesungen häufig und war für die Prüfungsvorbereitungen auf die (wunderschönen) Mitschriften seines Freundes angewiesen

Einstein schreibt in seiner Abhandlung: “Dem Zauber dieser Theorie wird sich kaum jemand entziehen können, der sie wirklich erfasst hat; sie bedeutet einen wahren Triumph der durch Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci und Levi-Civita begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls.” Diese Begeisterung Einsteins und einiger weiterer ‘Eingeweihten’ können die meisten Leute (der Autor dieses Buches inbegriffen) nicht so richtig teilen, weil sie die verwendeten mathematischen ‘Tools’ nicht beherrschen. Zwar schrieb schon Galilei, dass das Buch der Natur in der Sprache der Mathematik geschrieben sei - aber die von der Einstein’schen Theorie geforderten Kenntnisse sind für die meisten Menschen eine Zumutung. A. Hermann schreibt dazu in seiner lesenswerten Einstein-Biographie:

> Das machte manchen Zeitgenossen zornig. Der Arzt und Schriftsteller Alfred Döblin sagte: Kopernikus, Kepler und Galilei könne er begreifen, die neue Theorie aber, die “abscheuliche Relativitätslehre”, schliesse ihn “und die ungeheure Menge aller Menschen, auch der denkenden, auch der gebildeten, von ihrer Erkenntnis aus”. Die Naturwissenschaftler von heute mit Einstein an der Spitze hätten sich zu einer “Bruderschaft” entwickelt, die sich “frei-maurerischer Zeichen und beinahe einer spiritistischen Klopfsprache bedient”. [30-220]

Wie bei der SRT haben aber auch bei der ART (Allgemeine Relativitätstheorie) im Laufe der Jahrzehnte verschiedene Leute für gebildete Laien das Tor zu einem qualitativen Verständnis weit geöffnet. Unterdessen ist es soweit, dass wir im wichtigsten Spezialfall die auftretenden Effekte auch quantitativ korrekt berechnen können, ohne dass wir dafür zuerst, im Anschluss an ein Grundstudium, noch einige Semester höhere Mathematik studieren müssen. Für mich waren die beiden bereits erwähnten Bücher [10] und [26] dabei am wichtigsten.

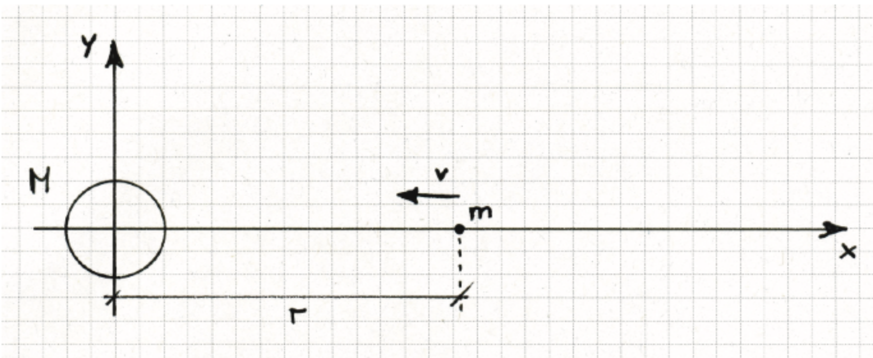
Marcel Grossmann, Albert Einstein, Gustav Geissler und Marcels Bruder
Eugen während ihrer Zeit als Studenten an der ETH

Unsere Einschränkung:

Wir berechnen nur den Einfluss einer einzigen, kugelförmigen, nicht rotierenden Masse, welche an ihrer Oberfläche ein nicht allzu starkes Gravitationsfeld aufweist. Wir behandeln also nur den Fall eines kugelsymmetrischen schwachen Gravitationsfeldes. Schwach heisst dabei: Die Fluchtgeschwindigkeit von der Oberfläche der felderzeugenden Kugel soll viel kleiner sein als die Lichtgeschwindigkeit.

Damit gilt für einen Kasten, der aus grossem Abstand frei zur Oberfläche dieser Kugel fällt, die ganze Zeit in sehr guter Näherung $E_{kin} = 0.5 \cdot m_0 \cdot v^2$. Im Diagramm auf p.77 im Abschnitt **E4** sehen wir, dass das noch angeht bis etwa $v = c/3$. Die Fluchtgeschwindigkeit von der Erde beträgt aber lediglich 11.2 km/s, bei der Sonne sind es 618 km/s !! Diese Zahlen liegen *weit* unter unserer Obergrenze von c/3 = 100'000 km/s, bei der die noch abzuleitenden Formeln unbrauchbar werden. Fast überall im Weltall ausser in der Nähe von ganz exotischen Objekten wie Neutronensternen oder Schwarzen Löchern sind unsere Zusatzbedingungen extrem gut erfüllt. Ganz besonders gilt das für jeden Ort im gravitativen 'Einzugsgebiet' unserer Sonne.

Lassen wir nun also ein kleines Labor von sehr weit weg entlang der x-Achse gegen das Zentrum einer kugelförmigen Masse M fallen:



Das kleine Labor soll am Anfang der Betrachtung gerade diejenige kleine Anfangsgeschwindigkeit haben, für die gilt

$$0.5 \cdot m \cdot v^2 = E_{kin} = -E_{pot} = G \cdot M \cdot m / r$$

Wegen des Energieerhaltungssatzes ist diese Gleichung während des Fallens auch in jedem späteren Zeitpunkt für immer kleinere Werte von r und immer grössere Werte von v erfüllt. Nach der Division durch m erhalten wir

$$v^2 = 2 \cdot G \cdot M / r = -2 \cdot \Phi(r) \quad \text{und} \quad v^2/c^2 = 2 \cdot G \cdot M / (c^2 \cdot r) = -2 \cdot \Phi(r) / c^2 = 2 \cdot \alpha / r = R_s / r$$

mit den Definitionen $\Phi(r) = -G \cdot M / r$, $\alpha = G \cdot M / c^2$ und $R_S = 2 \cdot G \cdot M / c^2$. $\Phi(r)$ ist der klassische Ausdruck für das Potential im Newton'schen Gravitationsfeld, R_S ist der sogenannte Schwarzschild- Radius. Für unseren alles bestimmenden Wurzelausdruck erhalten wir somit

$$\boxed{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot r}} = \sqrt{1-\frac{R_S}{r}} = \sqrt{1-\frac{2\alpha}{r}} = \sqrt{1+\frac{2 \cdot \Phi(r)}{c^2}}}$$

Nun ist aber nach unserer zusätzlichen Voraussetzung der Wert von v^2/c^2 und damit auch derjenige von $2\cdot \alpha / r$ sehr klein. Das Quadrat von α / r ist daher noch viel kleiner, was die folgende Umformung gestattet:

$$\sqrt{1-\frac{2\alpha}{r}} \approx \sqrt{1-\frac{2\alpha}{r}+\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2} = \sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2} = 1-\frac{\alpha}{r}$$

Damit und wegen $\Phi(r) = -(\alpha / r)\cdot c^2$ können wir unsere Wurzel etwas vereinfachen:

$$\boxed{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{2\alpha}{r}} \approx \left(1-\frac{\alpha}{r}\right) = \left(1+\frac{\Phi(r)}{c^2}\right)}$$

Wir wollen uns nochmals vergewissern, dass diese Näherung sehr, sehr gut ist: Die grösste Gravitationsfeldstärke tritt im Sonnensystem an der Oberfläche der Sonne auf. Prüfen Sie nach, dass dort der Wert von α / r etwa $2.1\cdot 10^{-6}$ beträgt! Wir haben oben das Quadrat von diesem Ausdruck in die Rechnung geschmuggelt, also etwas im Bereich von $4\cdot 10^{-12}$! Dieses Glied ist eine Million mal kleiner als der bedeutsame Term $2\cdot\alpha / r$.

Setzen wir auch noch unseren Definitionen von R_S , α und $\Phi(r)$ ein Denkmal:

$$\boxed{\alpha = \frac{G\cdot M}{c^2}} \qquad \boxed{R_S = \frac{2\cdot G\cdot M}{c^2} = 2\cdot\alpha} \qquad \boxed{\phi(r) = -\frac{G\cdot M}{r}}$$

Damit sind wir vorbereitet darauf, in unserem wichtigen Spezialfall die Konsequenzen aus dem Äquivalenzprinzip zu ziehen und herzuleiten, wie ein Gravitationsfeld den Gang von Uhren und die Länge von Massstäben beeinflusst.

Zum Schluss wollen wir nochmals daran erinnern, welche zusätzliche Annahme wir bei der Herleitung dieser Formeln gemacht haben. Wir können das jetzt auf verschiedene Arten formulieren:

- die beim freien Fall aus der Ruhe möglichen Geschwindigkeiten sollen *viel* kleiner sein als c
- die beim freien Fall aus der Ruhelage erzielbare kinetische Energie soll immer *viel* kleiner sein als die Ruheenergie $m\cdot c^2$
- der Betrag $m\cdot\Phi(r)$ der potentiellen Energie soll immer *viel* kleiner sein als die Ruheenergie $m\cdot c^2$
- der Kugelradius der Zentralmasse M soll *viel* grösser sein als deren Schwarzschildradius, sodass der Term R_S / r ausserhalb der Kugel überall *viel* kleiner als 1 ist

Es muss sowieso noch betont werden, dass die oben hergeleiteten Formeln nur im *Äussern* der Kugel gültig sind. Im Innern derselben nimmt die Gravitationsfeldstärke ja wieder ab und ist im Zentrum - allein schon aus Symmetriegründen - null. Diese Abnahme ist nach Newton übrigens linear. Wir werden in **H5** noch darauf zurückkommen.

G4 Uhren und Massstäbe im Schwarzschild-Feld

In unserem Sinne *schwache* Gravitationsfelder werden oft auch Schwarzschild-Felder genannt zu Ehren des deutschen Physikers und Astronomen Karl Schwarzschild (1873-1916). Dieser beschäftigte sich bereits um die Jahrhundertwende mit der Frage, ob der physikalische Raum der Astronomie wirklich euklidisch sei oder nicht, und schon 1913 begann er nach der von Einstein vorhergesagten Rotverschiebung von Spektrallinien im Spektrum der Sonne zu suchen. Wenige Wochen nach der Publikation von Einsteins Gleichungen präsentierte er als erster eine exakte Lösung derselben, und einige Wochen später reichte er bereits eine zweite nach.

Diese Arbeiten verfasste er während seines Kriegsdienstes an der Ostfront. Dort zog er sich auch eine Hautkrankheit zu, an der er noch 1916 starb.

Lassen wir also wieder unser kleines Labor genau wie im letzten Abschnitt aus dem ‘OFF’ einer kugelförmigen Masse entgegenfallen. Wir überlegen uns, wie sich die Messwerte eines Beobachters in diesem Labor zu denjenigen eines unbewegten Beobachters im OFF verhalten, also zu denjenigen eines von M (und allen anderen grossen Massen) sehr weit entfernten und relativ zu M ruhenden Beobachters.

Nach dem Äquivalenzprinzip ist das frei fallende Labor in jedem Moment ein gravitationsfreies Inertialsystem im Sinne der SRT. Damit wissen wir aber schon, in welcher Beziehung die Messungen im fallenden Labor im Abstand r vom Zentrum von M zu denjenigen des Beobachters im OFF stehen: r legt ja zusammen mit α (oder R_S oder Φ) den Wert unseres Wurzelausdrucks fest:

$$\Delta t(r) = \Delta t(\infty) \cdot \surd = \Delta t(\infty) \cdot \sqrt{1 - R_S / r} \approx \Delta t(\infty) \cdot (1 - \alpha / r) = \Delta t(\infty) \cdot (1 + \Phi(r) / c^2)$$

$$\Delta x(r) = \Delta x(\infty) / \surd = \Delta x(\infty) / \sqrt{1 - R_S / r} \approx \Delta x(\infty) / (1 - \alpha / r) = \Delta x(\infty) / (1 + \Phi(r) / c^2)$$

$\Delta y(r) = \Delta y(\infty)$ (keine seitliche Kontraktion)

$\Delta z(r) = \Delta z(\infty)$ (keine seitliche Kontraktion)

Diese Ergebnisse erhalten wir aus der SRT und unserer vierten Formulierung des Äquivalenzprinzips. Mit dem freien Fall haben wir die Gravitation vollständig verschwinden lassen, wir haben sie für den Beobachter im OFF durch eine in jedem Moment gerade angepasste Beschleunigung ersetzt. Die Insassen im frei fallenden Labor befinden sich also die ganze Zeit in einem Inertialsystem. Sie müssen also z.B. im Spektrum des angeregten Wasserstoffs immer dieselben Wellenlängen messen. Nun sollen sie mit der Momentangeschwindigkeit $v = \sqrt{2 \cdot G \cdot M / r}$ am Ort r vorbeifliegen. Dabei sollen sie die Frequenzen im Spektrum von *dort ruhendem*, leuchtendem Wasser-stoffgas messen. Nach Berücksichtigung des Dopplereffektes (die Laborinsassen kennen die SRT) müssen sie in ihrem Laborsystem, da sie sich ja in einem Inertialsystem befinden, die üblichen bekannten Werte erhalten. Am Ort r im Gravitationsfeld ruhendes Wasserstoffgas strahlt also mit Frequenzen, die mit den aus dem OFF gesehen *zu langsam laufenden Uhren* des frei fallenden Labors gerade richtig bestimmt werden !! Das bedeutet aber, dass ruhende Uhren oder andere schwingungsfähige Systeme im Abstand r vom Gravitationszentrum genau um denselben Faktor langsamer gehen (im Vergleich mit solchen im OFF) wie diejenigen in unserem fallenden Labor.

Wir gelangen damit zur folgenden Formulierung des Äquivalenzprinzips, die nicht mehr allgemein gilt, sondern auf unsere spezielle Situation zugeschnitten ist:

Messungen von Längen und Zeitintervallen, die in einem kleinen, ruhenden Labor am Ort r im Gravitationsfeld von M vorgenommen werden, transformieren sich gleich wie diejenigen unseres frei fallenden Labors, wenn dieses entlang einer Feldlinie am Ort r vorbeifällt.

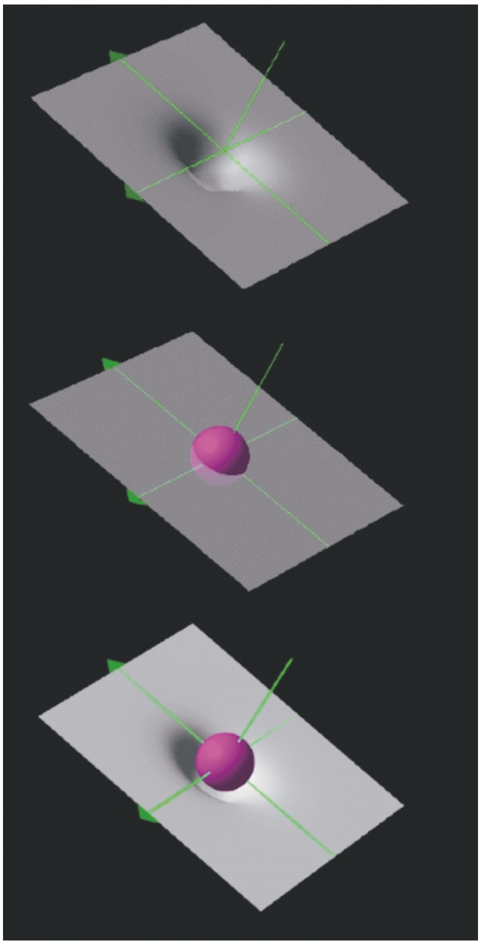
Betrachten wir die Gleichungen auf p.107 und p.108, so können wir aus ihnen die folgenden qualitativen Aussagen ableiten:

1. Je kleiner r ist, desto weniger Zeit verstreicht dort im Vergleich zu einer Uhr im OFF. Je stärker das Gravitationsfeld ist, desto langsamer gehen die Uhren! Uhren, die im gleichen Abstand vom Zentrum von M ruhen, laufen gleich schnell.

2. Je kleiner r ist, desto länger ist dort eine Strecke in radialer Richtung, wenn sie mit lokalen Massstäben gemessen wird. Aus dem OFF gesagt: Masstäbe verkürzen sich in radialer Richtung mit zunehmender Stärke des Gravitationsfeldes! Für die Dicke einer Kugelschale um M werden also lokale Geometer einen grösseren Wert bestimmen als ein Beobachter im OFF.

3. Der Umfang eines Kreises um den Mittelpunkt von M wird aber von lokalen Beobachtern gleich gross gemessen wie von einem Beobachter aus dem OFF.

Der zweite und der dritte Punkt bedeuten zusammengenommen, dass für einen Beobachter im Gravitationsfeld der Durchmesser eines Kreises länger ist als sein Umfang, dividiert durch π ! Die Gesetze der euklidischen Geometrie gelten also in einem Gravitationsfeld nicht mehr. Dass der Kreisdurchmesser länger ist als nach der euklidischen Erwartung, wenn er mit lokalen Massstäben und nicht aus dem OFF bestimmt wird, wird meist folgendermassen illustriert:



Es wird eine Delle gezeichnet, die wirklich die Eigenschaft hat, dass der Durchmesser, entlang der grauen Fläche gemessen, länger ist als der Kreis-umfang geteilt durch π . Gern lässt man in dieser Delle dann noch als Planet ein Kügelchen kreisen, als ob es da ein Oben oder Unten und ein zusätzliches Gravitationsfeld in z-Richtung gäbe!

Epstein schimpft schwer über diese "zutiefst irreführende Darstellung" [10-205]. Er hat natürlich Recht. Mit dieser Delle will man nur die *Metrik in der Äquatorebene* durch den Stern darstellen. Die Massstäbe liegen immer *in* dieser Äquatorebene, sie werden aber in radialer Richtung kürzer, wenn man sich der Oberfläche des Sterns nähert. Am kürzesten sind sie dann im Mittelpunkt des Sterns.

Um diese Verzerrung gegenüber der euklidischen Metrik darzustellen, dehnt man diese Äquatorebene in einen 'Hyperraum' - ob man eine Delle nach 'unten' oder eine Beule nach 'oben' zeichnet ist dabei belanglos. Diese zusätzliche zeichnerische Dimension hat mit der z-Richtung nichts zu tun. Der Wendepunkt des Querschnitts dieser Delle hat von der z-Achse den Abstand R, wenn R der aus dem OFF gemessene Radius des Sternes ist.

Wir sitzen im Folgenden meistens neben einem Beobachter im OFF, also sehr weit weg von der Masse M, an einem Ort, wo das Potential $\Phi(r)$ praktisch verschwindet. Diese leicht fiktive Position hilft uns, wenn wir die Messwerte von einem Labor im Abstand r_1 in diejenigen eines Labors im Abstand r_2 vom Massenzentrum transformieren wollen. Stellen Sie sich zum Beispiel ein Blinklicht vor, das am Ort r_1 mit konstanter Frequenz aufleuchtet. Welches Zeitintervall misst ein lokaler Beobachter am Ort r_2 mit seiner Uhr, bis er 100 Lichtblitze gezählt hat ?

Es gilt nach p.108 $\Delta t(r_1) / \sqrt{1 - R_S / r_1} = \Delta t(\infty) = \Delta t(r_2) / \sqrt{1 - R_S / r_2}$ und damit

$\Delta t(r_2) = \Delta t(r_1) \cdot \sqrt{1 - R_S / r_2} / \sqrt{1 - R_S / r_1} = \Delta t(r_1) \cdot \sqrt{(1 - R_S / r_2) / (1 - R_S / r_1)}$

Entsprechend gilt für kleine Längen in radialer Richtung (also in x-Richtung)

$\Delta x(r_2) \cdot \sqrt{1 - R_S / r_2} = \Delta x(\infty) = \Delta x(r_1) \cdot \sqrt{1 - R_S / r_1}$ etc.

(Kleine) Strecken quer zu den Feldlinien sind hingegen für alle Beobachter gleich lang.

Wir werden meistens mit unseren Näherungen rechnen:

$\Delta t(r_2) / (1 - \alpha / r_2) \approx \Delta t(\infty) \approx \Delta t(r_1) / (1 - \alpha / r_1)$

$\Delta x(r_2) \cdot (1 - \alpha / r_2) \approx \Delta x(\infty) \approx \Delta x(r_1) \cdot (1 - \alpha / r_1)$

oder

$\Delta t(r_2) / (1 + \Phi(r_2) / c^2) \approx \Delta t(\infty) \approx \Delta t(r_1) / (1 + \Phi(r_1) / c^2)$

$\Delta x(r_2) \cdot (1 + \Phi(r_2) / c^2) \approx \Delta x(\infty) \approx \Delta x(r_1) \cdot (1 + \Phi(r_1) / c^2)$

Damit wissen wir genau Bescheid darüber, wie die ortsabhängigen Messwerte von Zeitintervallen und Längen transformiert werden müssen. Gönnen wir uns jetzt zur Belohnung eine kleine Rechnung: Eine Uhr soll oben auf einem 22.6 m hohen Turm in jeder Sekunde genau einen Piepser aussenden. Eine baugleiche Uhr soll unten am Fuss des Turmes stehen und die Zeit zwischen dem Eintreffen der Piepser messen. Wir wissen schon, dass die untere Uhr etwas langsamer geht. Welchen zeitlichen Abstand zwischen den Piepsern misst die untere Uhr?

Für das Verhältnis $\Delta t(\text{oben})/\Delta t(\text{unten})$ erhalten wir aus den obigen exakten Formeln den Ausdruck

$\sqrt{(1 - 2 \cdot \alpha_E / (r_E + 22.6)) / (1 - 2 \cdot \alpha_E / r_E)}$ mit $\alpha_E \approx 4.43 \cdot 10^{-3}$ m und $r_E \approx 6.373 \cdot 10^6$ m

Gibt man diese Zahlen ein, so zeigen die meisten Taschenrechnern einfach 1 ! Die beiden Werte unterscheiden sich zuwenig, als dass man bei 10 oder 12 Stellen noch einen Unterschied zu 1 sehen könnte! Die Unterschiede sind also für kleine Verschiebungen im Gravitationsfeld der Erde derart klein, dass es an ein Wunder grenzt, dass man sie schon 1960 messen konnte (Experiment von Pound und Rebka, siehe **I4**). Damit wir die Grösse des Effekts berechnen können, sollten wir also nicht das Verhältnis $\Delta t(\text{oben}) / \Delta t(\text{unten})$ bilden, sondern die winzige Differenz dieser beiden Zeiten ins Verhältnis zu einer der Zeiten selber setzen. Wir müssten dann etwas erhalten, das kleiner ist als 10^{-12}.

Bestimmen wir also $(\Delta t(\text{oben}) - \Delta t(\text{unten})) / \Delta t(\text{unten}) = (\Delta t(r_2) - \Delta t(r_1)) / \Delta t(r_1)$

Es empfiehlt sich, dabei die Näherungsformeln ohne die Wurzeln zu benützen:

$$\frac{\Delta t(r_2) - \Delta t(r_1)}{\Delta t(r_1)} \approx \frac{\Delta t(\infty) \cdot (1 - \alpha/r_2) - \Delta t(\infty) \cdot (1 - \alpha/r_1)}{\Delta t(\infty) \cdot (1 - \alpha/r_1)} = \frac{\alpha/r_1 - \alpha/r_2}{(1 - \alpha/r_1)} = \alpha \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot r_1} \cdot \frac{r_1}{r_1 - \alpha} = \alpha \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2(r_1 - \alpha)}$$

Schreiben wir für die Differenz $(r_2 - r_1)$ einfach Δh und bedenken wir zudem, dass wir das Resultat nur im Subpromillebereich verändern, wenn wir für $r_2 \cdot (r_1 - \alpha)$ einfach r_E^2 schreiben, so erhalten wir das sehr einfache Ergebnis

$$\frac{\Delta t(r_2) - \Delta t(r_1)}{\Delta t(r_1)} \approx \alpha \cdot \frac{\Delta h}{r_E^2} \approx 2.47 \cdot 10^{-15}$$

Der Effekt ist also von der Grössenordnung 1 : 10^{15} und es ist daher ganz in Ordnung, dass wir ihn vorher in den ersten 12 Nachkommastellen nicht gefunden haben.

In noch vertrautere Gefilde kommen wir, wenn wir dieselbe Rechnung mit der Potential-Darstellung durchführen. Wir erhalten (ausgehend von der Näherungsschreibweise ohne Wurzel) genau wie vorher schnell den ersten der Terme in der folgenden Zeile:

$$\frac{\Phi(r_2) - \Phi(r_1)}{c^2 + \Phi(r_1)} \approx \frac{\Phi(r_2) - \Phi(r_1)}{c^2} \approx \frac{g \cdot \Delta h}{c^2}$$

Die erste Vereinfachung basiert dann auf unserer Zusatzvoraussetzung, die ja im Gravitationsfeld der Erde extrem gut erfüllt ist: $\Phi(r)$ ist überall *viel* kleiner als c^2 und kann deshalb als Summand im Nenner ohne weiteres weggelassen werden. Und bei der kleinen Höhendifferenz von 22.6 m an der Erdoberfläche können wir für die Potentialdifferenz im Zähler in guter Näherung $g \cdot \Delta h$ einsetzen! Auf die Eingabe von $9.81 \cdot 22.6 / 9 \cdot 10^{16}$ reagiert der Rechner auch brav mit dem Ergebnis $2.46 \cdot 10^{-15}$.

Damit haben wir bereits einen berühmten Test der ART quantitativ gemeistert. Die eigentliche Kunst besteht hier oft darin, das Problem erstens so zu formulieren, dass es eine bequeme Rechnung gestattet, und zweitens in dieser Rechnung geschickte Näherungen zu verwenden, damit das Resultat numerisch überhaupt bestimmt werden kann. Weitere Beispiele werden folgen.

Keine Berührungsängste:

Montag, 26. Oktober 1931
“Was der Arbeiter von der Relativitätstheorie wissen muss”
Prof. Albert Einstein
Beginn 8 Uhr, Saaleinlass 7 Uhr

Beachten Sie auch den leicht verdeckten Text ganz unten rechts !

G5 Verschiedene Lichtgeschwindigkeiten ?!

Wer Längen und Zeiten messen kann, der kann kann auch Geschwindigkeiten messen. Kümmern wir uns also darum, wie die entsprechenden Messwerte eines im Abstand r vom Zentrum unserer kugelförmigen Masse ruhenden Beobachters für einen Beobachter im OFF zu transformieren sind.

Es ist klar, dass wir wie in der SRT unterscheiden müssen, ob eine Geschwindigkeit in x-Richtung, also längs der Feldlinien, betrachtet wird oder eine in y-Richtung, d.h. senkrecht zu den Feldlinien. Die gemessenen Zeitintervalle transformieren sich ja richtungsunabhängig, während die Transformation der Laufstrecke richtungsabhängig ist. Zur Notation: $v_y(r;r)$ bezeichne die Geschwindigkeit eines Objekts, welches sich im Abstand r vom Zentrum von M in y-Richtung bewegt, wie sie in einem am Ort r ruhenden Labor gemessen wird. $v_y(r;\infty)$ soll die Geschwindigkeit bezeichnen, die ein Beobachter im OFF an demselben Objekt bei derselben Bewegung misst. Wir rechnen:

$v_y(r;r) = \Delta y(r)/\Delta t(r) = \Delta y(\infty)/(\Delta t(\infty)\cdot\sqrt{}(1 - 2\cdot\alpha/r)) = (\Delta y(\infty)/\Delta t(\infty)) / \sqrt{}(1 - 2\cdot\alpha/r) = v_y(r;\infty) / \sqrt{}(1 - 2\cdot\alpha/r)$

also $v_y(r;\infty) = v_y(r;r) \cdot \sqrt{}(1 - 2\cdot\alpha/r) = v_y(r;r) \cdot \sqrt{}(1 - R_S/r) = v_y(r;r) \cdot \sqrt{}(1 + 2\cdot \Phi(r) / c^2)$

Es ist also genau wie in der SRT : Eine von Rot lokal gemessene Quergeschwindigkeit u_y' präsentiert sich Schwarz um den Wurzelterm verlangsamt: $u_y = u_y'\cdot\sqrt{}$ (siehe p.60 in **D5**)

Benutzen wir die Näherungen von p.107 für $\sqrt{}(1 - 2\cdot\alpha/r)$, so erhalten wir den einfacheren Ausdruck

$v_y(r;\infty) \approx v_y(r;r) \cdot (1 - \alpha/r) = v_y(r;r) \cdot (1 + \Phi(r) / c^2)$

Dieselbe Rechnung für Geschwindigkeiten in x-Richtung liefert ein anderes Resultat:

$v_x(r;r) = \Delta x(r)/\Delta t(r) = (\Delta x(\infty)/\sqrt{}(1-R_S/r)) / (\Delta t(\infty)\cdot\sqrt{}(1-R_S/r)) = (\Delta y(\infty)/\Delta t(\infty)) / (1-R_S/r) = v_x(r;\infty) / (1-R_S/r)$

also $v_x(r;\infty) = v_x(r;r)\cdot(1 - R_S/r) = v_x(r;r)\cdot(1 - 2\cdot\alpha/r) = v_x(r;r)\cdot(1 + 2\cdot\Phi(r)/c^2)$

Hier tritt unser Wurzelfaktor im Quadrat auf und die Wurzel entfällt damit! Deshalb brauchen wir in diesem Fall auch nicht mit Näherungen zu arbeiten.

Elementare, aber etwas umständliche Rechnungen [26-135f] liefern eine *Näherungsformel*, welche für alle Bewegungsrichtungen taugt. Darin bezeichnet ∂ den Winkel zwischen v und den Feldlinien:

$$v(r;\infty;\partial) \approx v(r;r;\partial) \cdot (1 - \alpha\cdot(1+\cos^2(\partial)) / r)$$

Der Term $1+\cos^2(\partial)$ ist ja gleich eins, wenn $\partial = 90°$, also wenn die Bewegung in y-Richtung erfolgt, und er ist gleich 2 für $\partial = 0°$ und $\partial = 180°$, also wenn es sich um eine Geschwindigkeit in x-Richung handelt. Wir hätten diese Formel eigentlich auch erraten können ...

Aus der Ferne betrachtet verlangsamen sich also Geschwindigkeiten in der Nähe von grossen Massen. Das ist ja weiters nicht verwunderlich, wenn auch der Zeitablauf selber verlangsamt erscheint. Nun kommt aber der Hammer: Das gilt natürlich auch für die Lichtgeschwindigkeit !!

Messen wir in einem Labor am Ort r die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in *irgendeiner* Richtung, so werden wir den Standardwert $c(r;r;\partial) = c_0 \approx 3\cdot10^8$ m/s erhalten. Diesen Wert haben wir aber (aus der Sicht eines Beobachters im OFF) mit unseren evtl. verkürzten Massstäben und sicher verlangsamten Uhren erhalten. Für einen Beobachter aus dem OFF muss sich also das Licht am Ort r im Gravitationsfeld der Masse M mit der langsameren und richtungsabhängigen Geschwindigkeit

$$c(r;\infty;\partial) \approx c(r;r;\partial) \cdot (1 - \alpha\cdot(1+\cos^2(\partial)) / r) = c_0 \cdot (1 - \alpha\cdot(1+\cos^2(\partial)) / r)$$

ausbreiten ! Das heisst, dass für einen Beobachter im OFF die Lichtgeschwindigkeit c_0 nur noch eine Obergrenze für den gravitationsfreien Raum darstellt. In der Nähe von Massen kommt das Licht (aus dem OFF beobachtet) aber langsamer voran. Derweil messen lokale Beobachter vor Ort immer den bekannten Wert c_0 . *Lokal* ist die Welt überall Lorentz'sch ...

Halten wir fest, mit welcher Geschwindigkeit sich das Licht für einen Beobachter im OFF in der Nähe von grossen Massen fortpflanzt:

$$\boxed{\begin{aligned} c_x(r;\infty) &\approx c_0 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \alpha}{r}\right) \\ c_y(r;\infty) &\approx c_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \\ c(r;\infty;\delta) &\approx c_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{r} \cdot \left(1 + \cos^2(\delta)\right)\right) \end{aligned}}$$

Gravitation wirkt also (aus der Ferne beobachtet) auf das Licht wie ein Brechungsindex ! Je stärker das Feld ist, desto langsamer kommt das Licht voran. Der Brechungsindex hängt dabei allerdings nicht nur vom Ort r, sondern auch noch von der Richtung ∂ ab. Ändert sich aber der Brechungsindex, dann wird sich das Licht nicht mehr gradlinig ausbreiten - es sei denn, dass der Lichtstrahl genau entlang einer Feldlinie zum Zentrum von M läuft. In allen anderen Fällen muss das Phänomen der *Brechung* auftreten. Wir sind damit vorbereitet auf die Berechnung desjenigen Experimentes, dessen Ausgang Einstein über Nacht zu einer Berühmtheit ersten Ranges gemacht hat: Der Lichtablenkung am Sonnenrand, fotografierbar nur bei einer Sonnenfinsternis (**l2**).

Tatsächlich transformieren sich aber *alle* Geschwindigkeiten gemäss den eingerahmten Formeln, man muss dabei nur c_0 durch die lokal gemessene Geschwindigkeit v(r;r) ersetzen. Das bedeutet, dass derjenige Viertel eines Satelliten, welcher sich am nächsten bei der Erde befindet, etwas langsamer vorankommt als derjenige, der ganz aussen liegt. Wenn aber in einer Viererreihe die Leute ganz rechts immer ein bisschen schneller gehen als diejenigen ganz links, dann wird sich die Richtung, in der die Truppe marschiert, allmählich nach links drehen. Statt dass sich der frei fallende (oder fliegende) Satellit ‘geradeaus’ bewegt, läuft er daher in einer Bahn um die Erde ! Genau so erklärt Einstein die Wirkung der Gravitation - auf Kräfte kann er ganz verzichten. Die ‘Verzerrungen’ der Metrik des Raumes und der Raumzeit bewirken von selber, dass Trägheitsbahnen gerade so verlaufen, wie wir es von der Newtonschen Mechanik her kennen.

Wenn wir alles nur aus der Warte des Beobachters im OFF beschreiben, dann können wir ganz auf ‘geschrumpfte Massstäbe’ und ‘verlangsamte Uhren’ verzichten und alle Phänomene nur aus dieser Brechung in der Nähe von Massen ableiten. Tatsächlich sitzen wir aber mitten in solchen Gravitationsfeldern drin, und unsere Atomuhren zeigen die von Einstein geforderten Effekte heute direkt (**l5**, **l6** und **l7**). Es wäre ohnehin etwas elitär oder abgehoben, sich nur aus dem OFF mit der Welt zu befassen ...

Epstein widmet dem Thema “Gravitation durch Brechung” in [10-195ff] einen vierseitigen Einschub, dessen Lektüre der geneigten Leserin empfohlen sei. Eine sehr schöne Illustration dazu finden Sie auf der übernächsten Seite.

Damit können wir vielleicht auch schon die wenigen Worte verstehen, in welche Misner, Thorne und Wheeler die ganze Allgemeine Relativitätstheorie auf unübertreffliche Art zusammenfassen:

“Matter tells space how to curve, and space tells matter how to move.” ‘Telefonbuch’ [27-0005]

Ich versuche eine Übersetzung:

“Die Materie sagt dem Raum, wie er sich zu krümmen hat, und der Raum sagt der Materie, wie sie zu fallen hat.”

Mit ’space’ respektive ‘Raum’ ist dabei natürlich die 4d-Raumzeit gemeint ...

G6 Aufgaben und Anregungen

1. Giessen Sie ganz langsam viel farblosen Zitronensirup in ein Glas, welches Sie vorher schon halb mit Wasser gefüllt haben. Richten Sie den Strahl eines Laserpointers quer durch das Glas und beobachten Sie, wie die lokal unterschiedlichen Brechungsindices lokal unterschiedliche Lichtgeschwindigkeiten und damit Richtungsänderungen provozieren!

2. Korrigieren und präzisieren Sie im Lehrbuch [8] die Seite 124 ! Sie behandelt das Schrumpfen von Massstäben in der Nähe von grossen Massen.

3. Besuchen Sie die Webseite “ www.zarm.uni-bremen.de/index.htm” zum Fallturm in Bremen.

4. Berechnen Sie den Schwarzschildradius des Mondes, der Erde und der Sonne. Vergleichen Sie jeweils mit dem effektiven Radius dieser kugelförmigen Körper, d.h. bilden Sie die Quotienten R_s / R .

5. Berechnen Sie den Quotienten R_s / R auch für ein Atom und für einen Atomkern. Müssen die Effekte der ART in der Atomphysik oder in der Kernphysik demnach berücksichtigt werden ?

6. Lesen Sie die Einstein-Biographie [31] von Thomas Bührke! (dtv 31074)

7. Suchen Sie Unterlagen zu den Experimenten von Eötvös und Dicke zur Gleichheit von träger und schwerer Masse und studieren Sie die Grundidee dieser Experimente.

8. Der amerikanische Physiker Richard P. Feynman hat folgenden Vorschlag gemacht, um das Schrumpfen von Massstäben zu illustrieren: Man denke sich eine riesige Herdplatte, die so geheizt wird, dass sie in der Mitte kühl und nach aussen hin immer wärmer wird. Macht man es richtig, dann haben Masstäbe in radialer Richtung infolge der Wärmeausdehnung überall gerade die richtige Länge ! Was kann man damit schön zeigen - und welchen grundsätzlichen Mangel hat diese Konstruktion?

9. Denken Sie sich noch geeignete Uhren aus zur Herdplatten-Variante der Schwarzschild-Metrik.

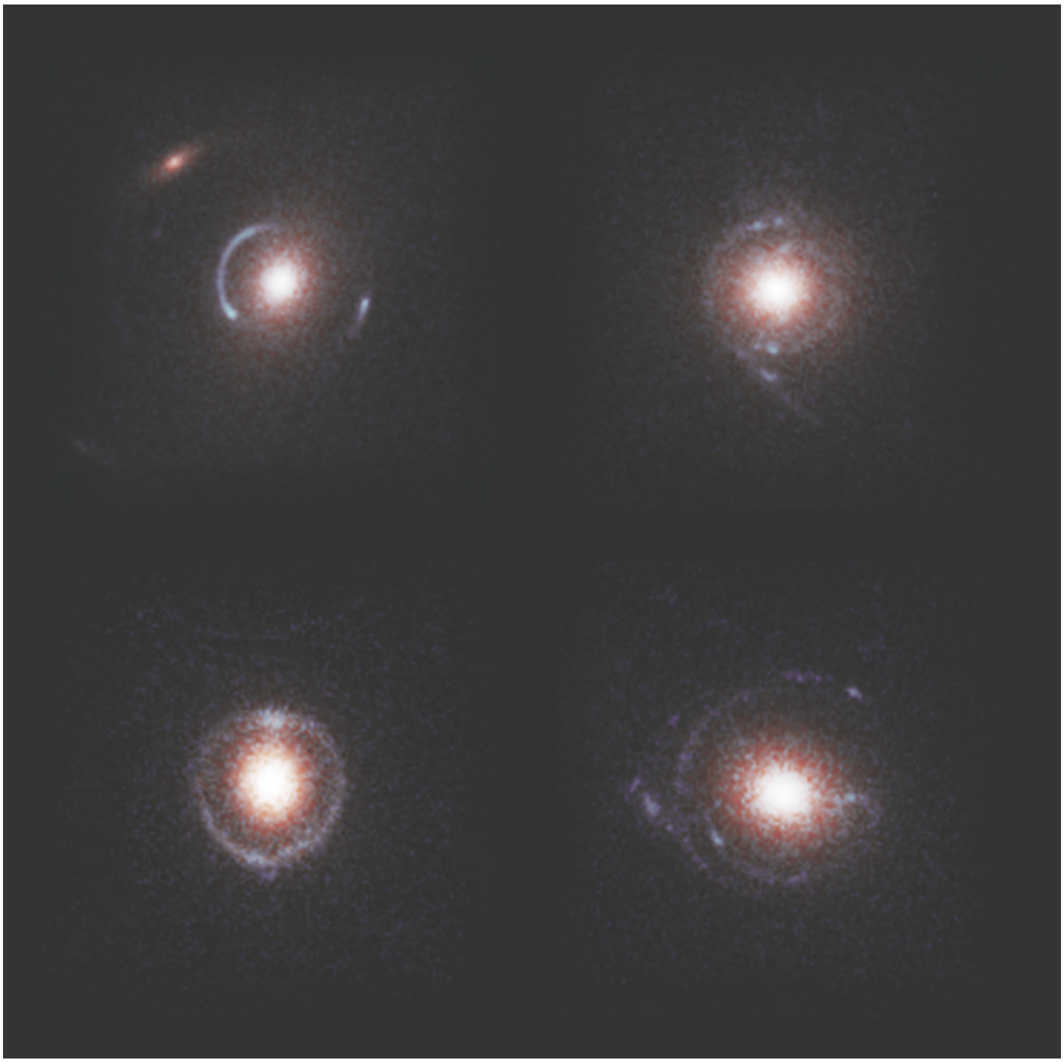
10. Wieviele Sekunden macht es aus im Laufe eines Menschenlebens von 80 Jahren, ob man auf den Malediven oder in den Hochanden auf 4000 müM lebt ?

11. In einem Meteoriten sei eine ganz neue Art von Materie gefunden worden, bei der sich träge und schwere Masse unterscheiden. Wie kann man das überhaupt feststellen? Welche Folgen hätte das für die Gravitationstheorien von a) Newton b) Einstein

12. Was heisst eigentlich ‘gradlinig’ in einem Gravitationsfeld, in welchem der Weg von Lichtstrahlen krumm ist?

13. Zeigen Sie, dass eine Uhr an Bord eines Satelliten, der sich auf einem Kreis mit Radius r im Schwarzschild-Feld der Masse M bewegt, um den Faktor $(1 - 3\cdot\alpha / (2\cdot r))$ langsamer geht als eine identische Uhr im OFF. Sie brauchen dafür die SRT *und* die ART !

14. Berechnen Sie den Gangunterschied zweier Uhren, die sich nahe der Erdoberfläche an Orten befinden, die eine Höhendifferenz von Δh aufweisen, indem Sie die Gravitation durch eine Rakete der Länge Δh ersetzen, die Sie mit **g** im feldfreien Raum beschleunigen. Setzen Sie für die Anfangsgeschwindigkeit 0 ein und berücksichtigen Sie den Dopplereffekt! Denn wenn die Signale oben an der Spitze ankommen, dann bewegt sich diese ja schon ein bisschen schneller als die Uhr am Boden bei der Aussendung des Signals ...



Einige der schönsten 'Einstein-Ringe' aus der Sammlung des Hubble-Weltraumteleskops. Sie ent- stehen dadurch, dass das Gravitationsfeld der zentralen, hellorangen Galaxie für den Strahlengang des blauen Lichts einer weit hinter ihr liegenden Quelle (meist einem Quasar) wie eine Linse wirkt. Wir sehen dann dasselbe Obiekt überall um den Rand der Vordergrund-Galaxie herum. Dabei wird auch die Intensität des Lichtes des Hintergrundobjektes massiv verstärkt.

Derartige Gravitationslinsen hat Einstein bereits 1936 theoretisch vorausgesagt, er war aber eher pessimistisch hinsichtlich der Möglichkeit, diesen Effekt tatsächlich je zu beobachten. Es hat ja dann auch noch 60 Jahre gedauert ...

--> http://hubblesite.org/newscenter/archive, Suchbegriff 'gravitational lens'