The Sombrero Galaxy (VLT ANTU + FORS1)

ESO PR Photo 07a/00 (22 February 2000)

E Masse, Impuls und Energie

Nach der Kinematik soll jetzt die Dynamik abgehandelt werden. Im ersten Abschnitt untersuchen wir mit einem symmetrischen Gedankenexperiment, welchen Einfluss eine Relativbewegung auf die Grössen ‘Masse’ und ‘Impuls’ hat. Dies liefert uns ein neues Argument dafür, dass c eine Grenzgeschwindigkeit ist. Auch für die Masse und den Impuls wird ein schönes Epstein-Diagramm vorgestellt, welches zu demjenigen für Ort und Zeit korrespondiert. Dann wenden wir uns dem Energiebegriff zu und erkennen, dass Energie träge Masse haben muss. Aber *wieviel* träge Masse hat eine bestimmte Energiemenge? Eine Rechnung liefert uns die wohl bekannteste Formel der ganzen Physik. Das Ergebnis lässt sich wiederum in einem Epstein-Diagramm zu den Grössen Energie und Impuls darstellen.

E1 Der symmetrische Faustschlag

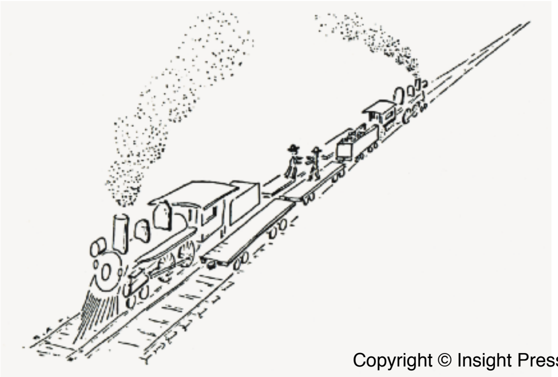
Engländer und Franzosen waren viele Jahre auf Kriegsfuss miteinander. Sie haben sich aber nicht nur politisch und militärisch bekämpft, sondern sie haben auch darüber gestritten, ob die ‘Wucht’ (lat. ‘impetus’) eines Geschosses linear oder quadratisch mit der Geschwindigkeit zunähme. Auf der Insel wurde eine geometrisch-vektorielle Betrachtungsweise bevorzugt, und entsprechend hat man die ‘Wucht’ durch $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$ beschrieben. Auf dem Kontinent rechnete man lieber mit skalaren Grössen wie $E = 0.5 \cdot m \cdot \mathbf{v}^2$. Diese Vorlieben zeigen sich heute noch in der Umgangssprache: Muss ein Engländer eine Grösse bestimmen, ‘then he will figure it out’, während der Franzose ‘va calculer ça’.

Heute wissen wir, dass beide Grössen, der Impuls und die kinetische Energie, ihre Bedeutung haben, und es wundert uns daher nicht, dass sowohl die Franzosen als auch die Engländer richtige Resultate bekommen haben. Das Beispiel zeigt aber sehr schön, wie sich auch die physikalischen Begriffe allmählich herauskristallisieren mussten und nicht schon bei der ersten Einführung ihre heutige Präzision besassen. Und um genau diese Begriffe, nämlich die (träge) Masse, den Impuls und die kinetische Energie, geht es in diesem Kapitel.

Wir müssen zuerst vom Impuls sprechen, *dessen Definition* $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$ *wir beibehalten* ! Sobald geklärt ist, wie sich die träge Masse vom einen Bezugssystem ins andere transformiert, ist auch geklärt, was mit dem Impuls geschieht, denn die Transformation der Geschwindigkeiten kennen wir nach **D4** und **D5** schon. Ohnehin sollte klar sein, dass der Impuls nicht nur in der SRT eine hoch-relative Grösse ist: Im Ruhesystem eines Körpers selber ist sein Impuls ja immer null.

Unsere Herleitung folgt der schönen Darstellung in [10-136ff]. Die Darstellung ist deshalb schön, weil sie die Gleichheit zweier Grössen aus der Symmetrie der Anordnung in einem Gedanken-experiment folgert. Die beiden Zwillinge Peter und Danny sollen auf zwei Einstein-Zügen auf einer langen, geraden Trasse aneinander vorbei rasen. Dabei führen sie einen völlig symmetrischen Faustschlag gegeneinander, also quer zur Fahrtrichtung des Zuges, aus:

Die Symmetrie der Anordnung erlaubt keinem der beiden Zwillinge stärker zuzuschlagen als der an-



dere. Beide Fäuste sind (in Ruhe gemessen!) gleich schwer, beide Fäuste sind im eigenen System gleich schnell ($\mathbf{u'} = -\mathbf{w}$). Jederzeit ist für beide die Summe der Impulse in der y-Richtung, also quer zur Fahrtrichtung, null. Wir betrachten den Schlag mit Peter im schwarzen, ungestrichenen System und sehen die Quergeschwindigkeit $\mathbf{u'}$ von Danny’s Faust nach **D5** verzögert. Dass Danny’s Faust dennoch einen ebensogrossen Impuls mitführt wie diejenige von Peter können wir uns nur damit erklären, dass Danny die Masse seiner Faust irgendwie erhöht hat. An dieser Stelle erzählt Epstein die Geschichte vom alternden Rausschmeisser in der Bourbon Street, der nicht mehr so schnell zuschlagen kann wie früher und dies dadurch kompensiert, dass er eine Rolle Münzen in die Faust nimmt, um dieser die alte Durchsetzungskraft zu geben ...

Wir rechnen die Angelegenheit nüchtern durch und gehen dabei davon aus, dass die Masse von der Relativgeschwindigkeit abhängt. Mit v bezeichnen wir (wie immer) die Relativgeschwindigkeit in der x-Richtung, also der Fahrtrichtung der Züge:

$\mathbf{p}_y$ (Danny) = - $\mathbf{p}_y$ (Peter)	gilt aus Symmetriegründen für Peter und für Danny
$m_{v+u} \cdot \mathbf{u} \;=\; - m_w \cdot \mathbf{w}$	für Peter und uns ! $\quad \mathbf{u} = \mathbf{u'} \cdot \surd = - \mathbf{w} \cdot \surd$ (nach **D5**) liefert
$m_{v+u} \cdot (-\mathbf{w} \cdot \surd \;) = - m_w \cdot \mathbf{w}$	Wir dividieren durch **-w** und erhalten
$m_{v+u} \cdot \surd \;=\; m_w$	v und u stehen dabei senkrecht und sind vektoriell zu addieren!

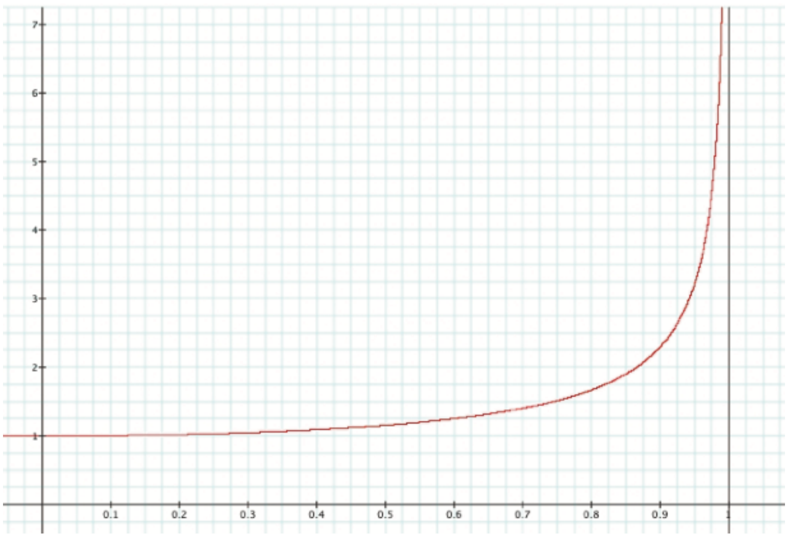
Diese Beziehung gilt für beliebig kleine Quergeschwindigkeiten $\mathbf{u'} = -\mathbf{w}$, im Grenzfall gilt sie also auch für $\mathbf{u'} = -\mathbf{w} = 0$. Dann wird auch $\mathbf{u} = 0$, und m_{v+u} können wir schreiben als m_v. $m_w = m_o$ bedeutet dann die Masse der Faust *in Ruhe*, die sogenannte *Ruhemasse*. Damit haben wir aber die Abhängigkeit der Masse von der Relativgeschwindigkeit v gefunden: Die träge Masse eines Körpers nimmt mit der Relativgeschwindigkeit zu, und es gilt

$$\boxed{m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Diese ‘dynamische Masse’ m_v ist auch für den relativistischen Impuls einzusetzen:

$$\boxed{\mathbf{p} = m_v \cdot \mathbf{v} = m_0 \cdot \mathbf{v} \,/\, \surd}$$

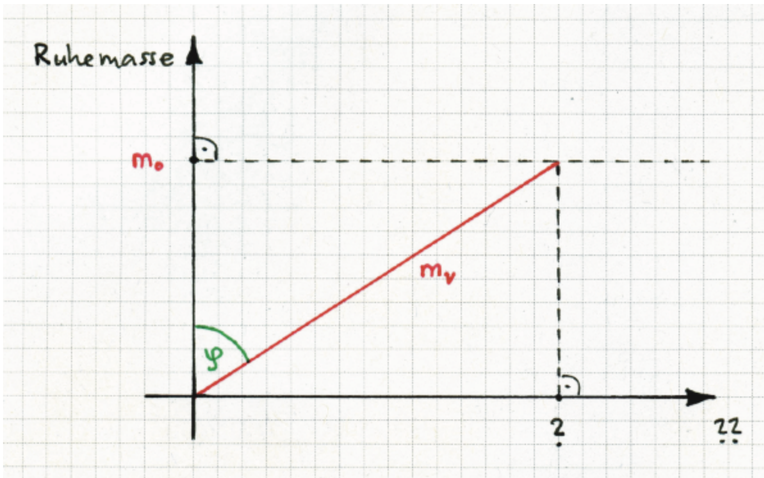
Die Masse eines Teilchens nimmt also mit seiner Geschwindigkeit zu. Ohne die Berücksichtigung dieses relativistischen Effekts würde keiner der modernen Teilchenbeschleuniger je funktionieren! Die Massenzunahme ist nämlich dramatisch, wenn sich die Geschwindigkeit der Teilchen der Lichtgeschwindigkeit nähert: Das Verhältnis m_v / m_0 folgt ja der Funktion $1 / \surd$, und für $v \rightarrow c$ geht diese Funktion gegen unendlich:



Wir erhalten damit eine ganz neue Begründung dafür, dass c eine Grenzgeschwindigkeit ist: Die zu beschleunigende Masse wächst gegen unendlich, wenn sich die Geschwindigkeit v der Lichtgeschwindigkeit nähert! Der Körper setzt somit einer weiteren Beschleunigung einen immer grösseren Widerstand entgegen. Dies werden wir noch besser verstehen, wenn wir die Fragen um den Begriff der Energie behandelt haben.

E2 Epsteindiagramme für Masse und Impuls

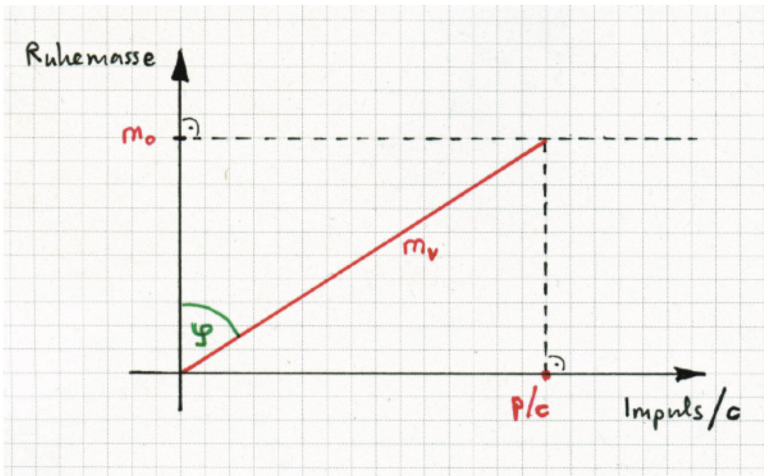
Die 'dynamische Masse' m_v erhalten wir also, indem wir die 'Ruhemasse' m_o durch unseren bekannten Wurzelausdruck dividieren, dem ja im Epsteindiagramm der Wert von cos(φ) entspricht. Daher können wir in einem einfachen Diagramm m_o und m_v darstellen:



Kommt nun der Projektion von m_v auf die horizontale Achse auch eine Bedeutung zu, und wenn ja welche? Diese Projektion erhalten wir ja als $m_v \cdot \sin(\varphi)$, und wenn wir uns noch daran erinnern, was dieser Sinuswert im Epsteindiagramm bedeutet, dann erhalten wir sofort

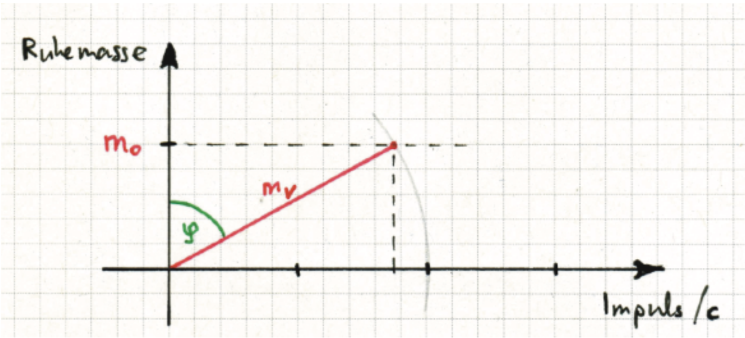
$$< \ ? \ > \ = \ m_v \cdot \sin(\varphi) \ = \ m_v \cdot v/c \ = \ p/c$$

Damit können wir das Epsteindiagramm zu Masse und Impuls vollständig beschriften:



Je schneller ein Objekt ist, desto grösser wird der Winkel φ, und damit wachsen auch die dynamische Masse und der Impuls dieses Objektes an (wenn die Ruhemasse konstant bleibt). sin(φ) und cos(φ) behalten dabei ihre bisherige Bedeutung. Man sieht hier wieder, wie schön die Darstellung würde, wenn c einfach den einheitenlosen Wert 1 hätte: 1 Raumzeiteinheit pro Raumzeiteinheit. Der Weg von den gängigen technischen Einheiten zu den 'natürlichen' ist aber leicht zu beschrei-ten; er steht dem Leser offen. Wir gestatten uns immerhin, bei diesem Diagramm vom Masse-Impuls-Diagramm zu sprechen.

Lösen wir noch eine Standardaufgabe mit einem solchen Masse-Impuls-Diagramm: Wie schnell muss sich ein Objekt bewegen, damit sich seine Masse verdoppelt ? Setzen wir für m_o 5 Häuschen ein, dann soll also m_v 10 Häuschen betragen:

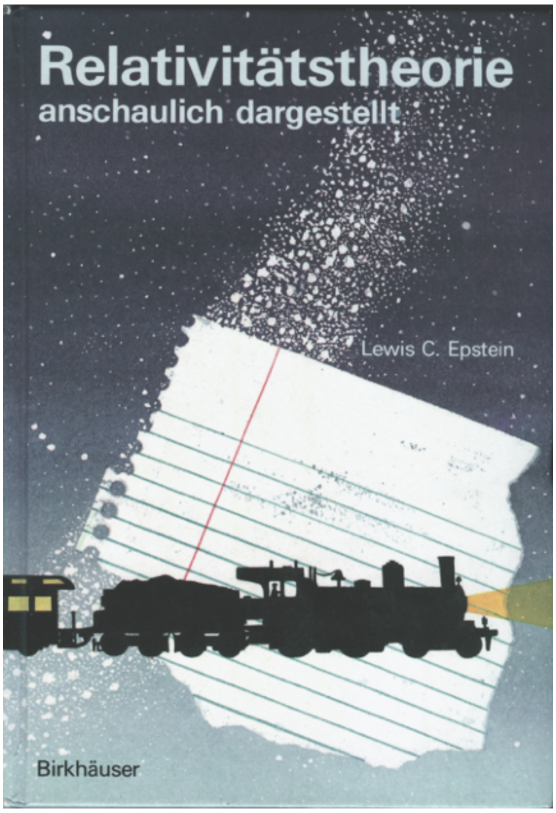


Ein Zirkelschlag mit Radius 10 Häuschen liefert uns m_v und φ. Aus der Zeichnung lesen wir ab:

v/c = sin(φ) ≈ (8.6 oder 8.7 Häuschen) / (10 Häuschen) ≈ 0.86 oder 0.87

Das Objekt muss sich also mit etwa 87% der Lichtgeschwindigkeit bewegen. Die Rechnung liefert für v/c den exakten Wert √(3)/2 mit der numerischen Näherung 0.8660.

Die umgekehrte Fragestellung ('Wie gross ist m_v/m_o für ein Objekt, welches sich mit 90% von c bewegt?') lässt sich genauso leicht mit einem Epsteindiagramm zu Masse und Impuls beantworten. Wenn man ganz auf den Taschenrechner verzichten will muss man nur darauf achten, dass m_v im Nenner einer einfachen Anzahl Häuschen entspricht (am besten 10 oder 20). Wer drei oder mehr Digits ablesen will muss für die Zeichnung schon Millimeterpapier verwenden ...



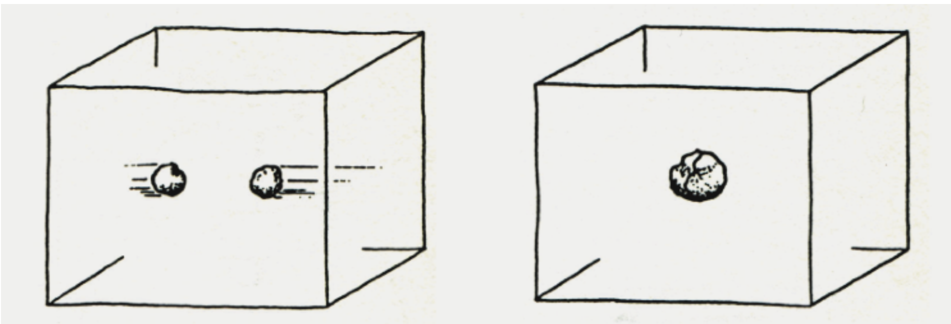
Mein Exemplar des Buches von 'Epstein'.

Das Buch ist offenbar seit einiger Zeit sowohl auf Deutsch als auch auf Englisch nur noch antiquarisch erhältlich, obwohl es von vielen SRT-Autoren zur Lektüre empfohlen wird.

E3 Masse und Energie - Betrachtungen im abgeschlossen System

Für die folgenden Überlegungen brauchen wir das Konzept eines ‘abgeschlossenen Systems’. Man stelle sich ein beliebig grosses, klar begrenztes Raumgebiet vor (z.B. einen Würfel, eine Schachtel, das Innere einer riesigen Thermosflasche etc.) und postuliere, dass das eingeschlossene Gebiet in keinerlei Austausch mit dem umgebenden Raum stehe: Es sollen weder Materie noch Ladung, weder Energie noch Impuls durch die Wände fliessen, es sollen keinerlei Felder von aussen in das Gebiet hineineinwirken oder umgekehrt, es sollen also auch keine Kräfte aus der Umgebung hinein oder von innen hinaus wirken. Stellen wir uns also ein solches Gebiet vor, wobei sofort zugegeben sei, dass so etwas gar nicht existiert. Es existieren aber auch keine Einsteinzüge, keine idealen Uhren und keine starren Massstäbe! Das kann uns nicht daran hindern, uns solche Dinge vorzu-stellen.

Ein solches abgeschlossenes System enthalte einzig zwei Bleiklumpen gleicher Masse, welche mit gleich grossen Geschwindigkeiten aufeinander zurasen. Nach der Kollision bilden sie *einen* grossen ruhenden Bleiklumpen (Zeichnung und Argumentation aus [10-143f]):

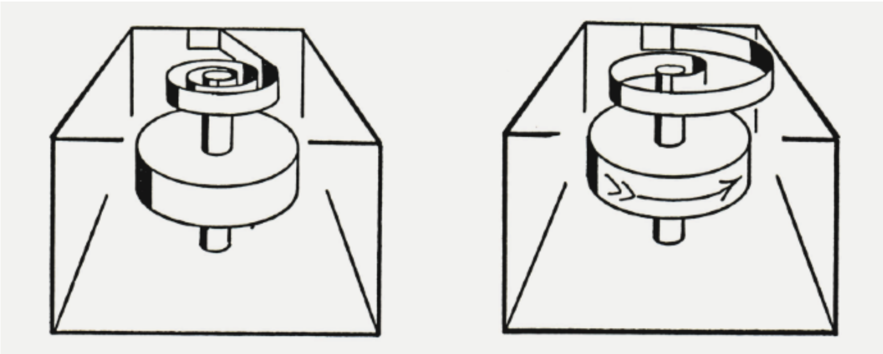


vorher nachher

Wohin ist die erhöhte Masse verschwunden, welche die beiden Klumpen vor der Kollision aufgrund ihrer Geschwindigkeit besassen? Sie muss immer noch irgendwo in unserem abgeschlossenen System stecken. Die Schüler finden meist eine gute Antwort: Der grosse ruhende Klumpen ist infolge der Deformation beim Zusammenprall wärmer, die einzelnen Materieteilchen haben eine erhöhte Geschwindigkeit. Die dynamische Masse ist also immer noch vorhanden, nur nicht mehr makroskopisch sichtbar. Gut, aber das heisst doch, dass wir einem Stein auch Masse zuführen, wenn wir ihn - egal wie - erwärmen! Energiezufuhr ist also mit einer Zunahme der Masse verbunden! Setzen wir eine Autobatterie und einen Heizstrahler ein, um einen Stein zu erwärmen, wird der Stein nachher mehr Masse haben als vorher - und die Batterie weniger! Mit dem Fluss von Energie von der Batterie in den Stein ist auch Masse in den Stein hinübergewandert!

Wir können bei unserem Gedankenexperiment die Wärmelehre leicht ausschalten, wenn wir den Vorgang umgekehrt ablaufen lassen: Zwischen zwei Klötzchen sei mithilfe eines Fadens eine Springfeder geklemmt. Der Faden ist zum Zerreissen gespannt und soll nun auch bersten. Die Feder entspannt sich, bleibt wo sie war und die beiden Klötzchen rasen in entgegengesetzte Richtungen davon. Sie haben nun beide eine grosse Geschwindigkeit, ihre Masse hat also zugenommen. Woher kommt diese Masse? Die Feder ist beim Entspannen ja auch eher wärmer geworden, an der Temperatur kann es diesmal nicht liegen. Nachher haben die Klötzchen mehr Masse und zudem noch kinetische Energie - was hatten wir denn vorher? Genau, vorher steckte in der gespannten Feder elastische Energie, und die zusätzliche Masse muss auch daher stammen.

Epstein bringt in [10-144f] ein ähnliches Beispiel:



vorher nachher

Vorher ist das Schwungrad in Ruhe und die Spiralfeder ist gespannt. *Nachher* haben wir eine entspannte Spiralfeder und ein rotierendes Schwungrad. Das rotierende Schwungrad muss mehr Masse haben als das stillstehnde. Diese zusätzliche Masse kann nur aus der Energie in der gespannten Feder kommen. Ja, wir müssen sagen, dass diese zusätzliche Masse des Schwungrades vorher in der gespannten Feder gewesen ist, wenn wir davon ausgehen, dass innerhalb eines abgeschlossenen Systems die gesamte Masse konstant sein soll!

Wir müssen uns also an den Gedanken gewöhnen, dass Energiezufuhr immer auch eine Zunahme der Masse bedeutet. Eine Feder hat also mehr Masse nach dem Spannen als vorher, und ein geladener Kondensator muss mehr Masse haben als ein entladener, obwohl ja nur einige Elektronen von der einen auf die andere Kondensatorplatte verschoben worden sind. Damit stellt sich aber die Frage, *wieviel* zusätzliche Masse ein Joule an zusätzlicher Energie bringt. Der Schottische Bierbrauer und 'Amateurphysiker' James Prescott Joule hat 1843 die Frage beantwortet, wieviele Joule an mechanischer Energie einer Kalorie Wärmeenergie entsprechen. Wir müssen jetzt klären, wieviele Joule Energie einem Kilogramm Masse entsprechen !

Joule genoss zwar zusammen mit seinem Bruder im Alter von 16 bis 18 zwei Jahre lang Privatunterricht beim grossen John Dalton, konnte aber nicht an einer Universität studieren und musste schon früh die Leitung der Familienbrauerei übernehmen. Es ist sehr aufschlussreich zu sehen, wie zögerlich die vornehme Royal Society in London und andere etablierte Herren die schönen Experimente von Joule zur Kenntnis nahmen. Löbliche Ausnahmen sind dabei John Davis, Förderer auch des anderen grossen Autodidakten Faraday, und der uns schon bekannte James Clerk Maxwell.

Lesen Sie den Wikipedia-Beitrag zu Joule oder auch die Darstellung in www.bhak-bludenz.ac.at/physik/geschichte/physiker/joule.shtml

James Prescott Joule (1818-1889)

E4 Energie hat also Masse. Wieviel Masse hat denn 1 Joule ?

Wenn wir ein Objekt der Ruhemasse m_o aus der Ruhe beschleunigen, so hat es nachher also nicht nur eine Geschwindigkeit und kinetische Energie, es hat auch eine grössere Masse m_v . Diesen Vorgang wollen wir nun rechnerisch behandeln, um die Massenzufuhr, die mit einer bestimmten Energiezufuhr verbunden ist, quantitativ bestimmen zu können. Wir wollen dieses wichtige Resultat exakt herleiten und brauchen dazu die Integralrechnung, allerdings nur in einem Umfang, wie sie jeder Schülerin vor dem Abitur oder der Matura zur Verfügung steht. Die Physik dient auch der Mathematik, wenn sie zeigt, wie leistungsfähig die formalen Methoden sind, die in der Mathematik entwickelt werden.

Die kinetische Energie ist gleich der investierten Beschleunigungsarbeit, und diese erhalten wir als Integral über $F \cdot ds$, wobei wir über die Beschleunigungsstrecke integrieren müssen:

$\Delta W = \int F \cdot ds = \Delta E_{kin} = E_{kin}$ (das letzte Gleichheitszeichen gilt nur für $v_o = 0$)

Nach Newton ist die Kraft F die zeitliche Änderung des Impulses: $F = dp / dt = d(m \cdot v) / dt$

Dies benützen wir, um das Integral über $F \cdot ds$ umzuschreiben:

$$F \cdot ds = \frac{d(m \cdot v)}{dt} \cdot ds = \frac{d(m \cdot v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = \frac{d(m \cdot v)}{dv} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dv = \frac{d(m \cdot v)}{dv} \cdot v \cdot dv$$

Statt über die Beschleunigungsstrecke können wir jetzt über die Geschwindigkeitszunahme integrieren:

$$\Delta W = \int_{s_0}^{s_{end}} F \cdot ds = \int_{v_0}^{v_{end}} \frac{d}{dv}(m \cdot v) \cdot v \cdot dv = \int_{0}^{v_{end}} \frac{d}{dv}(m \cdot v) \cdot v \cdot dv = E_{kin} \qquad (1)$$

Um etwas Vertrauen in diese Umformung herzustellen berechnen wir zuerst, was wir damit im klassischen Fall erhalten. Dort ist die beschleunigte Masse konstant, und die Ableitung von $m \cdot v$ nach v liefert einfach m . Wir erhalten damit nach (1) das folgende Resultat:

$$\Delta W = \int_{0}^{v_{end}} \frac{d}{dv}(m \cdot v) \cdot v \cdot dv = \int_{0}^{v_{end}} m \cdot v \cdot dv = m \cdot \int_{0}^{v_{end}} v \cdot dv = m \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot v^2\right]_0^{v_{end}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{end}^2 = E_{kin}$$

Wir erhalten für die kinetische Energie den vertrauten Ausdruck, womit hoffentlich das Misstrauen gegenüber dem Jonglieren mit den dv's und dt's etwas kleiner geworden ist.

Welchen Wert hat der Ausdruck $d(m \cdot v)/dv$ in der relativistischen Rechnung? Es ist

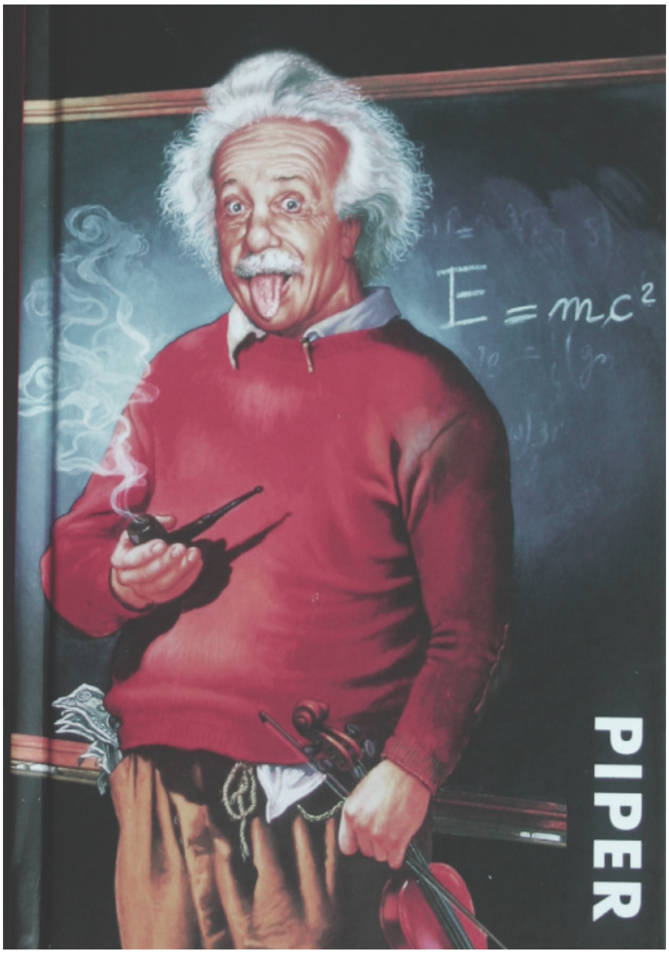
$$\frac{d}{dv}(m \cdot v) = \frac{d}{dv}\left(\frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = m_0 \cdot \frac{d}{dv}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = (\text{...rechne...}) = m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$$

Dieser Ausdruck wird gelegentlich auch die 'longitudinale Masse' genannt. Wir betonen aber, dass es nur *einen* Ausdruck für die träge Masse eines Körpers gibt, nämlich $m_v = m_o / \sqrt{}$.
Dieser ist richtungsunabhängig. Man hat von der longitudinalen Masse und der transversalen Masse gesprochen bevor geklärt war, dass sich Kräfte und Beschleunigungen verschieden transformieren für die Richtungen parallel und senkrecht zu v.

Damit können wir (1) auch im relativistischen Fall durchrechnen:

$$
\begin{aligned}
\Delta W &= \int_0^{v_{end}} m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \cdot v \cdot dv = m_0 \cdot \int_0^{v_{end}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \cdot v \cdot dv = && \text{m_0 ist ja konstant} \\
&= m_0 \cdot \frac{c^2}{-2} \cdot \int_0^{v_{end}} \frac{-2 \cdot v}{c^2} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \cdot dv = && \text{die 'innere Ableitung' als Faktor} \\
&= m_0 \cdot \frac{c^2}{-2} \cdot (-2) \cdot \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right]_0^{v_{end}} = && \text{vereinfachen und Grenzen setzen} \\
&= m_0 \cdot c^2 \cdot \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right] = && \text{ausmultiplizieren und} \\
&= m_V \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = \Delta m \cdot c^2 && \text{an die Definition von m_V auf p.69 denken}
\end{aligned}
$$

Damit haben wir den gesuchten Zusammenhang zwischen der zugeführten Energie ΔE (oder der geleisteten Arbeit ΔW) und der damit bewirkten Massenzunahme Δm gefunden. Die resultierende Formel ist derart einfach, dass sie eine seltsame Popularität erlangt hat.



So ziemlich alle Clichées be-dient die Illustration auf dem Umschlag des sonst ganz pfiffigen Büchleins ‘Einstein für die Westentasche’ von Ernst Peter Fischer zur SRT. Dabei darf natürlich auch die Formel
$E = m \cdot c^2$ nicht fehlen ...

Die US-Navy hat die Formel sogar noch etwas verbessert, um damit das 40-jährige Jubiläum von atomgetriebenen Flugzeugträgern zu feiern. Als 'Pixel' werden dabei Matrosen verwendet:

Zurück zur Physik. Wir wollen in einer roten Kiste festhalten, was Einstein später als das wohl bedeutendste Ergebnis der SRT bezeichnet hat:

$$\boxed{\Delta E = \Delta m \cdot c^2}$$

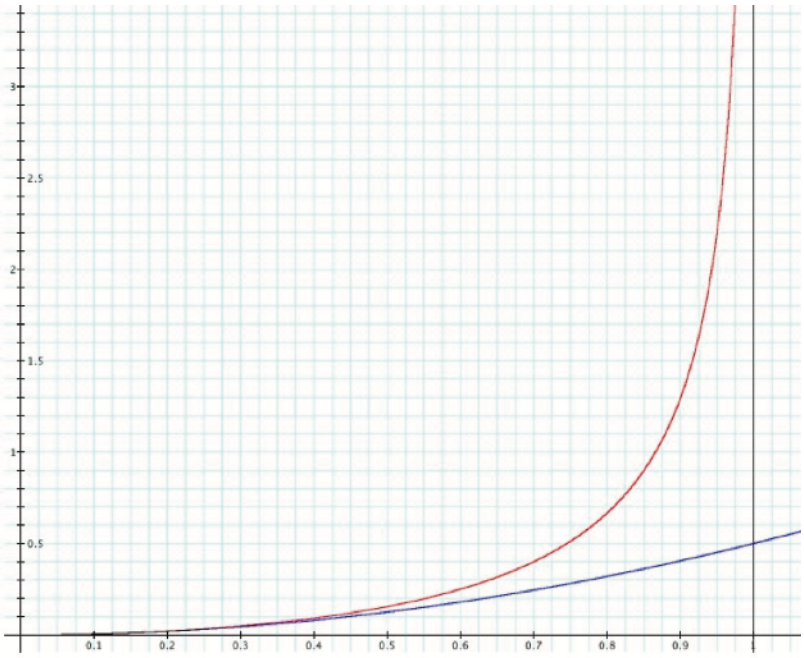
1 Joule zugeführte Energie bewirkt also eine Zunahme der Masse um 1 kg dividiert durch c^2 . Hier sind wir froh, dass wir c nicht mit 1 normiert haben, da sonst dieser Umrechnungsfaktor zwischen der Energie und der Masse nicht so klar zutage getreten wäre. Mit unserer Herleitung haben wir auch den in der SRT korrekten Ausdruck für die kinetische Energie gefunden:

$$\boxed{E_{kin} = (m_v - m_o) \cdot c^2}$$

Dass diese Formel für kleine Geschwindigkeiten in den klassischen Ausdruck $0.5 \cdot m_o \cdot v^2$ übergeht ist nicht offensichtlich. Wenn Ihnen die Graphik auf der folgenden Seite nicht genügt, dann können Sie das auch so erkennen: Entwickeln Sie den Term $1/\sqrt{\ } = (1 - (v/c)^2)^{-1/2} = (1 - x^2)^{-1/2}$ für x in eine Potenzreihe (nehmen Sie eine Formelsammlung oder ein Computer-Algebrasystem zuhilfe) und streichen Sie dann (für kleine Werte von x) in dieser Potenzreihe die Glieder vierter und höherer Ordnung.

Die Beziehung $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ hat Einstein übrigens erst kurz nach dem Erscheinen von [23] gefunden und im Herbst des Jahres 1905 quasi als Nachtrag mitgeteilt [24]. Schon 1901 hat Walter Kaufmann (1871-1947) aufgrund von Messungen an schnellen Elektronen eine Abhängigkeit der 'transversalen Masse' von der Geschwindigkeit erwogen. Wegen der fundamentalen Bedeutung der Formel ist sie experimentell immer wieder geprüft worden. So haben 2005 zwei Forschergruppen in Kanada und den USA die Genauigkeit offenbar auf 1 zu 1 Million steigern können [nature 438, 1096-1097]. Und, vor allem: In keinem der vielen Experimente konnte je eine Abweichung von Einsteins Formel nachgewiesen werden! Theorien können ja durch Experimente nicht bestätigt, wohl aber falsifiziert werden.

Wir wollen noch die kinetische Energie nach der klassischen und der relativistischen Rechnung in einem Diagramm vergleichen. Wir zeichnen dafür E_{kin} / E_o auf für Werte x = v/c von 0 bis 1. Dem klassische Verhalten entspricht die blaue Kurve mit $y = 0.5 \cdot x^2$, während das relativistische durch die rote Kurve mit $y = 1/\sqrt{(1 - x^2)} - 1$ wiedergegeben wird:



Man sieht schön, dass die Kurven erst für grössere Geschwindigkeiten voneinander abweichen. Elektronen können aber schon durch technisch gut handhabbare Beschleunigungsspannungen auf 0.8·c beschleunigt werden und zeigen dann deutliche Abweichungen vom klassischen Verhalten (Experimente von Kaufmann, Aufgabe 4).

Sehr schnelle Teilchen ($v \approx c$) ermöglichen auch eine sehr schnelle Herleitung der Beziehung zwischen der Massenzunahme und der zugeführten Energie. Ein Teilchen habe bereits eine Geschwindigkeit, die sich nur noch um Bruchteile von Promillen von c unterscheide. Die ganze zugeführte Energie kommt praktisch nur noch der Erhöhung der Masse zugute. Es gilt dann in guter Näherung $p = m_v \cdot v \approx m_v \cdot c$ und daher $dp/dv = c \cdot dm/dv$. Wir erhalten nun sofort

$$dW = (dp/dv) \cdot v \cdot dv = c \cdot (dm/dv) \cdot c \cdot dv = c^2 \cdot dm$$

und sind schon fertig: Die Massenzunahme ist der Energiezufuhr proportional, und der Propor-tionalitätsfaktor ist dabei das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ! Diese Rechnung ist eigentlich das Pendant zur klassischen Rechnung, die wir am Anfang des Abschnittes gemacht haben und bei der wir zusätzlich angenommen haben, dass m konstant sei.

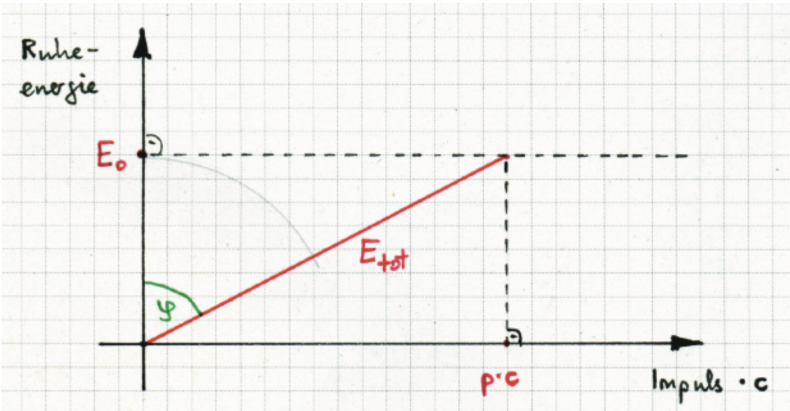
Das Produkt einer Masse mit dem Quadrat einer Geschwindigkeit stellt (wie man schon lange weiss) also eine Energie dar. Wir haben hergeleitet

$$\Delta W = m_v \cdot c^2 - m_o \cdot c^2 = \Delta m \cdot c^2 = E_{kin} = m_o \cdot c^2 \cdot (1/\sqrt{\ } - 1)$$

Der Ausdruck $m_o \cdot c^2$ gibt die Energiemenge an, welche der Ruhemasse entspricht, welche das Objekt schon vor der Beschleunigung besessen hat. Man nennt $m_o \cdot c^2$ daher die *Ruheenergie* des Objekts und schreibt dafür E_o . Der Ausdruck $m_v \cdot c^2$ steht dann für die Summe der Ruheenergie und der kinetischen Energie, also für die *Gesamtenergie* des Objekts. Diese werden wir mit E_{tot} bezeichnen.

E5 Epsteindiagramme für Energie und Impuls

Wieso soll ich es mir nicht einmal leicht machen? Nehmen Sie das Epsteindiagramm zu Masse und Impuls von **E2** und multiplizieren Sie darin alle auftretenden Strecken mit c^2 ! Wir brauchen nur noch genau hinzusehen und stellen fest, dass wir ein Epsteindiagramm zu den Grössen Energie und Impuls vor uns haben: Die Ruhemasse m_o wird zu $m_o \cdot c^2$, also zur Ruheenergie E_o, die dynamische Masse m_v wird zu $m_v \cdot c^2$, also zur Gesamtenergie E_{tot} , und statt p/c haben wir auf der horizontalen Achse eben $p \cdot c$:



Dabei behalten φ, sin(φ) und cos(φ) natürlich ihre bisherige Bedeutung. Die entsprechenden Beziehungen können aber in ihrem neuen Zusammenhang geprüft werden:

$E_{tot} \cdot \sin(\varphi) = m_v \cdot c^2 \cdot v/c = m_v \cdot c \cdot v = m_v \cdot v \cdot c = p \cdot c$

$E_{tot} \cdot \cos(\varphi) = m_v \cdot c^2 \cdot \sqrt{\ } = (m_v \cdot \sqrt{\ }) \cdot c^2 = m_o \cdot c^2 = E_o$

Mühelos erhalten wir auch die wichtige Beziehung zwischen den Energien und dem Impuls. Wir brauchen nur den Satz des Pythagoras anzuwenden:

$$(E_{tot})^2 = (E_o)^2 + (p \cdot c)^2 \qquad (2)$$

Auch die kinetische Energie kann leicht sichtbar gemacht werden: Man schlägt einen Kreis um den Ursprung mit Radius E_o und sieht dann E_{kin} als Differenz von $E_{tot} - E_o$.

Wir sollten an dieser Stelle nochmals darauf hinweisen, dass kein Teilchen mit nicht verschwindender Ruhemasse jemals die Lichtgeschwindigkeit ganz erreichen kann. Man müsste ja für seine Beschleunigung unendlich viel Energie aufwenden! Lassen Sie den Winkel φ im obigen Diagramm vor dem geistigen Auge immer mehr gegen 90° wachsen und beobachten Sie dabei, wie die Gesamtenergie des Teilchens anwächst!

Umgekehrt können wir auch folgern, dass Photonen keine Ruhemasse haben dürfen, da sie ja immer und für alle die Geschwindigkeit c haben. Aus $E_o = 0$ folgt für sie aus (2) die spezielle Beziehung $E_{tot} = p \cdot c$. Diese Lichtteilchen führen also nicht nur Energie, sondern auch einen wohldefi-nierten Impuls $p = E / c$ mit sich. Dieser Impuls der Lichtteilchen erzeugt einen bestimmten Druck auf eine bestrahlte Fläche. Dazu gibt es eine besonders schöne Illustration: Den Astronomen ist schon lange bekannt, dass das Sonnenlicht einen Strahlungsdruck auf den Schweif eines Kometen ausübt. Der Kometenschweif zeigt nämlich immer von der Sonne weg. Wenn sich der Komet wieder von der Sonne entfernt, zieht er also seinen Schweif nicht hinterher, sondern dieser fliegt ihm voraus! Der Staubschweif, der aus schwereren Teilchen besteht, zeigt sich dabei etwas träger als der Gas- oder Ionenschweif, der hauptsächlich aus Wassermolekülen besteht. Das Bild auf der nächsten Seite zeigt die beiden Komponenten des Schweifes wunderschön. Es handelt sich dabei um den Kometen Hale-Bopp, aufgenommen im März 1997.

http://astronomy.swin.edu.au/sao/imagegallery/Hale-Bopp.jpg

Man darf nun nicht meinen, dass die Gesamtenergie eines Objektes *immer* grösser wird, wenn es schneller wird. Wesentlich ist, ob ihm Energie zugeführt wird oder nicht. So nimmt bei einer Strassenbahn, die ihre Energie aus der Fahrleitung bezieht, die Gesamtenergie und die Masse mit der Geschwindigkeit tatsächlich zu wie im nebenstehenden Epsteindiagramm. Anders sieht es aber aus bei einem Elektromobil, also einem batteriebetriebenen Elektrofahrzeug. Es bezieht die Energie für die Beschleunigung ‘von seiner Substanz’, wandelt also nur elektro-chemische Energie in kinetische um. Dabei nimmt weder seine Gesamtenergie noch seine Masse zu. Zeichnen Sie das entsprechende Epsteindiagramm!

Die Algebra liefert allerhand weitere Beziehungen zwischen den Energien, dem Impuls und der Relativgeschwindigkeit. Die wichtigsten davon wollen wir hier festhalten:

$$\cos(\varphi) = \sqrt{} = m_o / m_v = m_o \cdot c^2 / m_v \cdot c^2 = E_o / E_{tot}$$

$$\sin(\varphi) = v/c = \sqrt{1 - m_o^2 / m_v^2} = \sqrt{1 - E_o^2 / E_{tot}^2} = \sqrt{1 - 1 / (1 + E_{kin}^2 / E_{tot}^2)}$$

$$m_o^2 = m_v^2 - p^2 / c^2$$

$$E_o^2 = E_{tot}^2 - p^2 \cdot c^2$$

$$p^2 = (m_v^2 - m_o^2) \cdot c^2$$

Wegen ihrer grossen Bedeutung ist die Beziehung $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ immer wieder auf neuen Wegen hergeleitet worden. Die wohl schönste und einfachste Herleitung hat Einstein selber 1946 (!) in seinem sehr lesenswerten Buch “Aus meinen späten Jahren” [20-121ff] präsentiert. Sie ist nicht ganz exakt (verwendet also einige Näherungen), braucht aber fast keine Mathematik und macht ganz sparsame Voraussetzungen. Die Lektüre sei dem Leser warm empfohlen.

E6 Aufgaben und Anregungen

1. Wieviel Masse strahlt ein Radiosender täglich ab, wenn er rund um die Uhr mit einer Leistung von 12 kW sendet ?

2. Welche Massenzufuhr erfährt die Erde täglich durch die Sonneneinstrahlung ? Rechnen Sie mit einer ‘Solarkonstanten’ von 1400 W/m^2 . Mit welcher Kraft drückt diese Strahlung auf den absorbierenden Erdquerschnitt (-> p. 78 unten zum Impuls von Strahlungsenergie) ?

3. 2005 betrug der Gesamtenergieverbrauch der Schweiz gemäss Bundesamt 890’440 TJ. Wieviele m^3 Granit haben eine dieser Energiemenge äquivalente Masse ?

4. Bestimmen Sie allgemein v/c für Elektronen, welche eine bestimmte Beschleunigungsspannung U durchlaufen haben a) nach klassischer und b) nach relativistischer Rechnung

5. HighCap-Kondensatoren bieten seit wenigen Jahren Kapazitäten von einigen Farad. Allerdings dürfen sie nicht an hohe Spannungen gelegt werden. Ein solcher Kondensator von 4.7 Farad habe ungeladen eine Masse von 4 Gramm. Welche Masse hat er, nachdem er an eine Spannung von 12 Volt gelegt worden ist ?

6. Die Chemiker gehen bei ihren Reaktionen immer von der Erhaltung der Masse aus. Könnte aber nicht bei heftigen Reaktionen soviel Energie freigesetzt werden, dass sich ein kleines Massendefizit bemerkbar macht ? Prüfen Sie das am Beispiel der Knallgasreaktion: Werden aus 2 Mol H_2 und 1 Mol O_2 2 Mol H_2O hergestellt, so wird dabei eine Energie von 2·240 kJ freigesetzt. Wieviele % der ursprünglichen Masse ‘verschwinden’ also ?

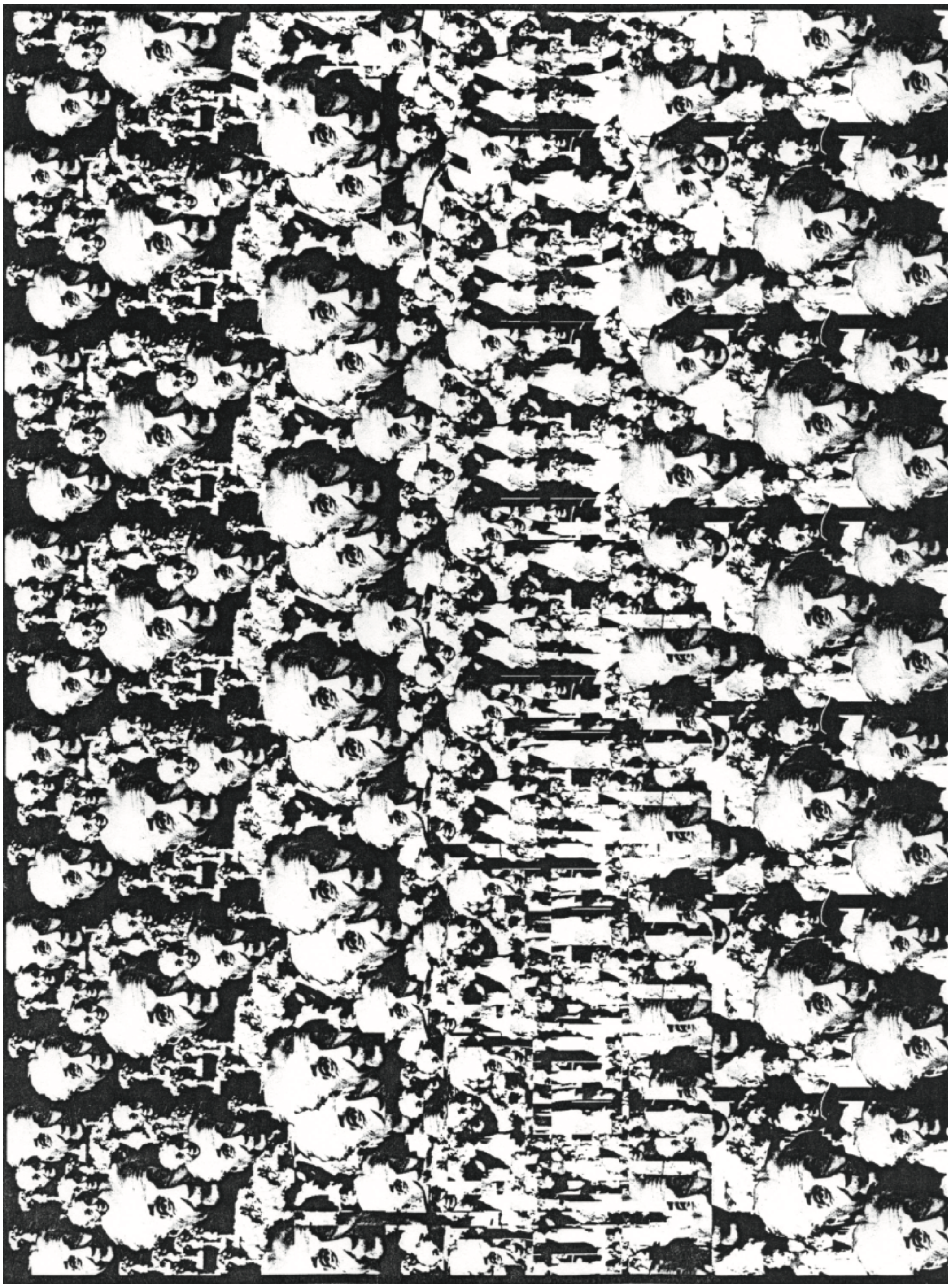
7. Bei welcher Geschwindigkeit (in % von c) ergibt sich $m_v = 3 \cdot m_o$? Lösen Sie die Aufgabe sowohl mit einer Zeichnung als auch mit einer Rechnung !

8. Das Verhältnis m_v / m_o kann als Mass für die in einem Teilchenbeschleuniger erreichte Geschwindigkeit genommen werden. Ein anderes Mass ist die noch bestehende Differenz zur Lichtgeschwindigkeit, ein weiteres die dem Teilchen zugeführte Eneregiemenge. Im Super-Protonen-Synchrotron im CERN kann man seit 1976 Protonen derart beschleunigen, dass m_v 427 mal so gross ist wie m_o . Berechnen Sie v/c, die Differenzgeschwindigkeit c – v sowie die erforderliche Beschleunigungsenergie in GeV (vgl. dazu auch [17-201ff] !).

9. Fortsetzung von Aufgabe 8: Ein kreisförmiger Tunnel, in welchem Protonen herumrasen, hat im CERN einen Radius von 1200 Meter. Wie stark müsste das Magnetfeld sein, um die Protonen mithilfe der Lorentzkraft auf der Kreisbahn zu halten, wenn sie nur die Ruhemasse m_o hätten ? Welche Masse m_v haben sie, wenn dafür effektiv ein Magnetfeld von 1.11 Tesla erforderlich ist ?

10. Die Energie des elektrischen Feldes einer geladenen Kugel beträgt $q^2 / (2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r)$. Welcher Radius ergibt sich daraus fürs Elektron, wenn man annimmt, dass seine Ruhemasse nichts anderes ist als die Masse, welche in der Energie seines elektrischen Feldes steckt ?
(Es gibt keine Experimente, welche eine räumliche Ausdehnung des Elektrons nachweisen)

11. Wir wissen aus **E1**, dass Impulse quer zu v invariant sind: $p_y' = p_y$. Definiert man die Kraft weiterhin als zeitliche Änderung des Impulses (F = dp/dt), so lässt sich leicht zeigen, wie sich Kräfte transformieren, die senkrecht stehen auf v . Daraus kann man herleiten, dass der Druck eine invariante Grösse ist. Die allgemeine Gasgleichung $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ liefert dann die Transformation der Temparatur, und diese diejenige der Energie ...



Ein Autostereogramm: Betrachten Sie einen Punkt etwa 40 cm hinter dem Blatt, wobei die Augen aber auf die Distanz zum Blatt selber adaptiert werden sollen. Einigen gelingt das nie, bei anderen stellt sich das 3d-Bild fast sofort ein, wenn ‘sie sich in das Blatt versenken’. Mit etwas Anstrengung kriegen es aber die meisten früher oder später hin; und hat man es einmal geschafft, so geht es das nächste Mal viel schneller. Übrigens: Es funktioniert *viel* besser im Querformat ...