

# Epstein erklärt Einstein

Eine Einführung in die Relativitätstheorien Albert Einsteins  
von David Eckstein



“So einfach wie möglich - aber nicht einfacher!”



# Epstein erklärt Einstein

Eine Einführung in die Relativitätstheorien Albert Einsteins  
“So einfach wie möglich - aber nicht einfacher!”

von David Eckstein

Version 2.0 Sommer 2009

Copyright © 2009 by David Eckstein. Das Buch darf weder als Ganzes noch in einzelnen Teilen in irgendeiner Form reproduziert werden ohne schriftliche Erlaubnis vom Autor.

Copyright © 2000 by Insight Press, California, was die vielen Zeichnungen aus dem Buch "Relativitätstheorie - anschaulich erklärt" von Lewis C. Epstein anbelangt. Für Reproduktionen jeder Art ist die schriftliche Genehmigung erforderlich durch The Bridges Law Firm, P.O. Box 410097, San Francisco, California, 94141-0097, USA

Das Buch enthält weiteres urheberrechtlich geschütztes Material wie zB die Bilder der ESO und des CERN. Dem Autor wurde die Benutzung dieser Bilder für dieses Buch gestattet, das bedeutet nicht, dass die Bilder frei sind von Urheberrechten. Alle Rechte liegen immer noch bei ihren Inhabern.

Dieses Buch wurde 2009 von Samuel Edelstein ins Englische übersetzt und 2013 im Verlag epubli unter ISBN 978-3-8442-7060-0 veröffentlicht.

## Impressum

Titel	Epstein erklärt Einstein
Autor	David Eckstein
Druck und Verlag	epubli GmbH, Berlin <a href="http://www.epubli.de">www.epubli.de</a>
Copyright	© 2013 David Eckstein
ISBN	978-3-8442-7136-2
email autor	<a href="mailto:david.eckstein@bluewin.ch">david.eckstein@bluewin.ch</a>

Titelbild	The Spectacular Spiral Galaxy ESO 269-G57 ESO press release 27/06 vom 26. Juli 2006 ©ESO
-----------	---

# Inhaltsverzeichnis

## Vorwort

### A Es knistert im Gebälk

A1	Newtons Fundamente der klassischen Physik .....	4
A2	Das Relativitätsprinzip von Galileo Galilei .....	8
A3	Maxwells Theorie des Elektromagnetismus ist inkompatibel .....	10
A4	Einstein durchtrennt den Gordischen Knoten .....	14
A5	Anregungen .....	16

### B Die drei fundamentalen Konsequenzen

B1	Primo: Gleichzeitigkeit ist relativ .....	20
B2	Secundo: Schnelle Uhren ticken langsamer .....	24
B3	Tertio: Schnelle Massstäbe sind kürzer .....	26
B4	Eine experimentelle Bestätigung: Myonen 1 .....	28
B5	Myonen 2 : Die andere Sicht .....	29
B6	Quantitatives zur Relativität der Gleichzeitigkeit .....	30
B7	Aufgaben und Anregungen .....	32

### C Epstein erklärt alles ganz einfach

C1	Epsteins Mythos .....	36
C2	Epstein-Diagramme .....	37
C3	Die Zeitdilatation im Epstein-Diagramm .....	40
C4	Die Längenkontraktion im Epstein-Diagramm .....	41
C5	Die Desynchronisation im Epstein-Diagramm .....	43
C6	Unsere Musteraufgabe im Epstein-Diagramm .....	44
C7	Das Zwillingsparadoxon in der Darstellung von Epstein .....	46
C8	Zusammenfassung .....	47
C9	Aufgaben und Anregungen .....	48

## D Lorentz-Transformationen, Geschwindigkeitsaddition und Dopplereffekt

D1	Koordinatentransformationen vor der SRT .....	52
D2	Herleitung der Lorentz-Transformationen aus den Epstein-Diagrammen .....	54
D3	Herleitung der Lorentz-Transformationen aus den Grundphänomenen .....	58
D4	Die Addition von Geschwindigkeiten in der SRT .....	59
D5	Quergeschwindigkeiten und Aberration .....	60
D6	Die optische Dopplerformel .....	61
D7	Aufgaben und Anregungen .....	64

## E Masse, Impuls und Energie

E1	Der symmetrische Faustschlag .....	68
E2	Epstein-Diagramme für Masse und Impuls .....	70
E3	Masse und Energie - Betrachtungen im abgeschlossenen System .....	72
E4	Energie hat also Masse. Wieviel Masse hat denn 1 Joule ? .....	74
E5	Epstein-Diagramme für Energie und Impuls .....	78
E6	Aufgaben und Anregungen .....	80

## F Die Erhaltungssätze

F1	Die ganze Physik .....	84
F2	Die relativistischen Korrekturen .....	86
F3	Beispiele zur Masse-Energie-Erhaltung .....	88
F4	Relativistische Stöße .....	92
F5	Erzeugung und Vernichtung von Teilchen .....	94
F6	Wie es jetzt weitergehen könnte .....	95
F7	Aufgaben und Anregungen .....	96

## G Von der Speziellen zur Allgemeinen Relativitätstheorie

G1	Eine seltsame experimentelle Tatsache .....	100
G2	Das Äquivalenzprinzip .....	102
G3	Unsere Beschränkung auf einen wichtigen Spezialfall .....	104
G4	Uhren und Massstäbe im Schwarzschild-Feld .....	108
G5	Verschiedene Lichtgeschwindigkeiten ?! .....	112
G6	Aufgaben und Anregungen .....	114

## H Epsteindiagramme zur Allgemeinen Relativitätstheorie

H1	Gravitation und Krümmung der Raumzeit .....	118
H2	Nochmals Zwillinge, die unterschiedlich schnell altern .....	120
H3	Eine quantitative Betrachtung .....	121
H4	Das Prinzip der maximalen Eigenzeit .....	122
H5	Epsteindiagramme - flach oder eingerollt .....	124
H6	Gravitation und Krümmung des Raumes .....	127
H7	Aufgaben und Anregungen .....	130

## I Experimente zur Allgemeinen Relativitätstheorie

I1	Die Periheldrehung des Merkur .....	134
I2	Die Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne .....	137
I3	Das Shapiro-Experiment .....	140
I4	Das Experiment von Rebka und Pound .....	143
I5	Hafele und Keating reisen um die Welt .....	144
I6	Das Maryland-Experiment .....	145
I7	GPS, LRS und Relativitätstheorie .....	146
I8	Der Einstein-Thirring-Lense-Effekt .....	148
I9	Gravitationswellen .....	150
I10	Aufgaben und Anregungen .....	152

## K Vertiefungen und selbständige Arbeiten

K1	Alte Experimente zur Messung der Lichtgeschwindigkeit .....	156
K2	Natürliche Masseinheiten in der SRT und ART .....	157
K3	Allgemeine Formeln für die Geschwindigkeitsaddition, den Dopplereffekt und die Aberration .....	158
K4	Kräfte und Beschleunigungen in der SRT .....	159
K5	“Die Eroberung des Weltraums” .....	160
K6	Alternative Herleitungen von $E = m \cdot c^2$ .....	161
K7	Herleitung der Geschwindigkeitsaddition aus dem Epstein-Diagramm .....	162
K8	Die Transformation der elektromagnetischen Größen .....	164
K9	SRT mit Vierervektoren .....	165
K10	Messen und Sehen in der SRT .....	166
K11	SRT mit Minkowski-Diagrammen .....	168
K12	SRT mit Penrose-Diagrammen .....	169
K13	SRT mit Asano-Diagrammen .....	170

## L Literatur

L1	Literaturverzeichnis in der Reihenfolge des Auftretens .....	174
L2	Literaturverzeichnis alphabetisch nach Autor .....	178

## Vorwort von Lewis C. Epstein zur Englischen Ausgabe

Who contributes the most to progress: The mountain man who finds the first pass at 10,000 feet through a high range, or the railroad engineer who later finds a low pass at 7,000 feet which will be used by trains, motor vehicles, pipelines, electric lines and optical cables?

It is hard to answer.

In the realm of physics, all the credit, the Nobel Prize, goes to the "mountain man". In physics, the "railroad engineer's" reward is best some money from writing and selling "low pass maps", which are books that make good understanding accessible to those who for various reasons cannot go up to 10,000 feet.

I am a "railroad engineer". I found a low pass through the theoretical physics mountains into Einstein land. The pass is mapped in a picture and a story book called *Relativity Visualized*. Here David Eckstein has taken my picture story and transliterated it into kosher physics. The story pivots on an intuitive idea I called: the speed of time.

From where came this "speed of time" story? Like many post 1960 physics ideas, it just came out of the smoke, which opens the band pass filter of the mind. Through the open filter comes lots of noise, a few distant memories and unusual convolutions of thought.

Recall childhood. I remember how slow time crawled when I was kept in detention, after school going home time, because of bad spelling or bad goofing. And I remember how fast time flew on the special occasion of riding up front on a steam locomotive's footplate. The Ancients too felt earthly time ran slow and fast. Slow in summer; each daylight hour became longer. Fast in winter; each daylight hour become shorter. Even in the lower spheres of heaven, the planets pace through the zodiac was not only variable, but occasionally back stepping.

Galileo put his first thermometer into chile pepper and demonstrated that part of what had been called heat was subjective, not objective. And he suspected time might also be, in part, subjective. So he tried hard to express the falling body law in terms of objective geometry, on distance from the top. Only reluctantly did he permit time to enter the falling body law. After all, how could time, a thing without material existence, have a linear control of a material object's speed? Time was not part of the tangible world. The Good Book relates how God created the world: 1) In the beginning God created the heaven and the earth, 2), 3), 4), 5), 6), 7) And on the seventh day he took a rest. On which day did God create time? Answer: The Ancients did not think time had objective existence, so it need not to be created. Time came out of men's head.

But once permitted into physics, time soon established itself as the immutable universal independent variable which drives all physical processes. The current of time, unalterable, untouchable by any force, any motion, any environment, anything whatsoever, ruled the dynamic world for the three centuries after Galileo.

No sooner had this immaculate conception of time set hard in human intuition than along came Einstein's wild idea: different, equally valid times can simultaneously coexist in the same space. The universal independent variable view of time was only three centuries old when Einstein arrived. Three centuries is brief when you realize the ancient view of time had sufficed for six hundred centuries.

If different times can coexist, then something like the child's view of time, something akin to the ancient view, is reopened. Different times can run at different speeds relative to each other. And so the words "speed of time" are reinflated with life. What follows in this work is David Eckstein's perspective on the new life and its immediate consequences.

San Francisco, California, Summer of 2008

Lewis Carrol Epstein

## Vorwort des Autors

Mit dieser Darstellung der Relativitätstheorien von Einstein ist es mir hoffentlich gelungen, interessierten Gymnasiastinnen oder neugierigen Abiturienten einen gut gangbaren Weg zu einem *quantitativen Verständnis* der beiden Theorien anzubieten. Elementare Physikkenntnisse werden dabei vorausgesetzt, und gelegentlich werden Analysiskenntnisse verwendet, wie sie in allen Grundkursen auf der Sekundarstufe II vermittelt werden. Gewisse Taschenrechnermodelle haben diese Kenntnisse heute allerdings schon eingebaut - wer will, kann also das Rechnen ganz an diese Geräte delegieren.

Im Vordergrund steht auch keineswegs das Rechnen, sondern das Entwickeln einer guten Anschauung. Dabei werden durchgängig die Diagramme von Lewis C. Epstein eingesetzt, welche von den Schülern erfahrungsgemäss nach kurzer Zeit als *selbstverständlich* betrachtet werden. Sie sind quantitativ korrekt und einfacher auszuwerten als die verbreiteten Diagramme nach Minkowski. Der Weg geht von den Grundphänomenen (Relativität der Zeitmessung, Relativität der Längenmessung und Relativität der Gleichzeitigkeit) zu den abstrakteren Koordinatentransformationen, und er wird sorgfältig und lückenlos besprochen. Schliesslich gelangen wir zur Metrik von Schwarzschild in der Allgemeinen Relativitätstheorie und können diese auch zur Berechnung der wichtigsten experimentell geprüften Effekte einsetzen.

Jedes Kapitel wird mit einer Seite von "Aufgaben und Anregungen" abgeschlossen. Die detaillierten Lösungen dieser Aufgaben beanspruchen über 100 Seiten; ein vollständiger Abdruck hätte das Buch dick, schwer und teuer gemacht. Die Lösungen werden aber (wie auch das Buch selber) über das Internet unter "[www.relativity.li](http://www.relativity.li)" jedermann zugänglich gemacht. Diese schöne Website hat mir Levin Gubler so eingerichtet, dass ich nur noch die Inhalte einfüllen kann. Ich möchte ihm an dieser Stelle ganz herzlich danken für seine Arbeit.

Ohne die Hilfe von verschiedenen Seiten hätte dieses Buch nicht entstehen können. Zuerst denke ich an die Schülerinnen und Schüler von etlichen Physik-Kursen an einer Erwachsenen-Maturitätsschule und einem Gymnasium, welche durch ihr Stirnrunzeln oder ihre leuchtenden Augen einzelne Abschnitte dieses Buches stark mitgeprägt haben. Oft haben mich erst Schülerfragen gezwungen, dieses oder jenes ganz klar darzustellen. Dann muss ich die Autoren zweier Bücher erwähnen, welchen ich viel zu verdanken habe: Einer von beiden, Lewis C. Epstein, ist weltweit bekannt, den anderen, Horst Melcher, kennen hingegen die wenigsten. Mir persönlich haben die beiden *zusammen* den Weg zu einem tieferen Verständnis bereitet.

Drei Personen haben dann den Entwurf des Buches kritisch durchgelesen und viele Korrekturen, stilistische Verbesserungen und Ergänzungen angeregt. Ich bin dafür Alfred Hepp, Hans Walser und Hans Buchmann ausserordentlich dankbar! Alfred Hepp und Jonathan Gubler haben ganz zu Beginn auch viel dazu beigetragen, dass das graphische Erscheinungsbild leserfreundlicher und grosszügiger geworden ist.

Schliesslich möchte ich auch dem Kanton Thurgau respektive seinem 'Steuersubstrat' danken. Dieses kleine Bundesland der Schweiz, dessen natürliche Hauptstadt Konstanz wäre, hat mir mit einem Bildungsurlaub den zeitlichen Freiraum verschafft, um die angesammelten Unterlagen und Erfahrungen zu diesem Buch zu verarbeiten. Es würde mich freuen, wenn viele Kolleginnen und Kollegen zusammen mit ihren Schülerinnen und Schülern davon einen Nutzen hätten.

Für die freundliche Genehmigung der Verwendung von urheberrechtlich geschützten Bildern möchte ich der ESO und dem CERN danken. Auch die beiden Karrikaturisten Sidney Harris und Oswald Huber haben den Abdruck eines Cartoons bewilligt. Der Insight-Verlag hat den Abdruck der vielen Zeichnungen aus Epsteins Buch bewilligt, und die Hamburgischen Electricitäts-Werke (heute Vattenfall Europe AG) gestatten den Abdruck der Abbildungen im Abschnitt **F3**. Auch Franz Embacher erlaubt freundlicherweise die Verwendung einer Illustration zum Thirring-Lense-Effekt. Etliche Bilder habe ich aber ohne Abklärung der Rechtslage aus dem Internet heruntergeladen oder sie sind mir ohne Quellenangabe von Schülerinnen zugetragen worden (so z.B. das Autostereogramm am Ende von **E6**). Bei den allermeisten Abbildungen ist die Quelle jedoch angegeben. Viele der Abbildungen, Photographien und Computergraphiken stammen natürlich vom Autor.

Frauenfeld, Mitte März 2007

"David Eckstein"

Die Version 2.0 dieses Buches profitiert sehr von den Fragen, die bei der Übersetzung ins Englisch von "Samuel Edelstein" gestellt worden sind. Ich möchte ihm an dieser Stelle für seine Arbeit ganz herzlich danken!

Frauenfeld, August 2009

"David Eckstein"

Gerne erwähne ich auch die Firmen, Institutionen und Privatpersonen, welche mit ihren grosszügigen Spenden den Druck der ersten Version dieses Buches überhaupt erst möglich gemacht haben:

sia Abrasives Industries, Frauenfeld  
Angelo Lombardi, Dr. sc. nat., Frauenfeld  
Kantonsschule Frauenfeld, Frauenfeld  
Hans M. Streit, Dr. sc. nat., Frauenfeld  
Stefan Casanova, dipl. natw. ETH, Frauenfeld



Spiral Galaxy NGC 4565  
(FORS / VLT)

ESO PR Photo 24a/05 (August 10, 2005)

© ESO

## A Es knistert im Gebälk

Die 'unumstösslichen Grundlagen des Denkens' werden vorgestellt: Newtons Konzepte von Raum und Zeit, der Begriff des Inertialsystems sowie derjenige der Masse eines Körpers. Dann wird das Relativitätsprinzip nach Galilei formuliert. Im dritten Abschnitt zeigen wir, dass Maxwells Theorie des Elektromagnetismus nicht mit Newtons Mechanik und Galileis Gleichberechtigung aller Inertialsysteme zusammenpasst: Die Geschwindigkeitsaddition nach Newton und Galilei beisst sich mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Der vierten Abschnitt zeigt, wie Einstein die Lösung dieses Konflikts anpackt. Schliesslich folgen noch ein paar Hinweise und Seitenblicke auf andere Fachgebiete, in denen es ebenfalls um 1900 in den Fundamenten zu rumoren begann.

## A1 Newtons Fundamente der klassischen Physik

In seinem grossartigen Werk “Philosophiae naturalis principia mathematica” hat Newton 1687 auf der Grundlage der Euklidischen Geometrie die Vorarbeiten der ‘Riesen’ Kepler, Galilei, Descartes und Huygens in eine einheitliche und umfassende Theorie eingebettet, die man heute die Newton’sche Mechanik nennt ([01], deutsche Ausgabe [02]). Keplers Gesetze zu den Planetenbewegungen, Galileis Fallgesetze, Descartes Stossgesetze und die Analyse der Kreisbewegung durch Huygens, die Bewegungen der himmlischen und der irdischen Körper werden allesamt zurückgeführt auf nur 3 Axiome und 1 Kraftgesetz. In seinem Buch wendet Newton seine eigene Theorie sofort erfolgreich an, um die Abplattungen der Erde und des Jupiters zu berechnen, Ebbe und Flut zu begründen und vieles andere mehr.

Der Erfolg seines mathematischen Ansatzes hat den Gang der Geistesgeschichte weit über die Naturwissenschaften hinaus beeinflusst, und die folgenden zwei Jahrhunderte haben diesen Erfolg nur noch gemehrt. Umso schwieriger war es, sich von den grundlegenden Vorstellungen zu lösen, auf denen Newtons Theorie aufbaut. Es sind dies Newtons Konzepte von der Zeit, vom Raum und von der trägen Masse eines Körpers.

### Newtons Zeit

Der Meister hat es in seinem Buch [02-27f] selber schön ausformuliert:

“Zeit, Raum, Ort und Bewegung sind allen wohlbekannt. Jedoch muss darauf hingewiesen werden, dass die gewöhnlichen Leute gerade diese Grössen nur aufgrund ihrer Beziehung zu den feststellbaren Dingen erfassen. Davon rühren manche falsche Vorstellungen her, und um diese zu beseitigen, verständigt man sich darüber, dass sich ebendiese Grössen in absolute und relative, wahre und scheinbare, mathematische und allgemein übliche auftrennen lassen.

Die absolute, wahre und mathematische Zeit, in sich und ihrer Natur nach ohne Beziehung zu irgendetwas Äusserem, fliesst gleichmässig dahin und wird auch als Dauer bezeichnet. Eine relative, scheinbare und allgemein übliche Zeit ist irgendein, durch eine Bewegung feststellbares äusseres Mass (gleichgültig ob ein genaues oder ungleichmässiges) für die Dauer, welche die gewöhnlichen Leute an Stelle der wahren Zeit benutzen, wie zum Beispiel eine Stunde, ein Tag, ein Monat, und ein Jahr.”

Und eine Seite später, also auf p.29 :

“Die absolute Zeit wird in der Astronomie von einer relativen Zeit mit Hilfe der Zeitgleichung unterschieden. Die natürlichen Tage, die von den gewöhnlichen Leuten für gewissermassen gleich grosse Zeitmasse gehalten werden, sind nämlich verschieden lang. Diese Ungleichheit korrigieren die Astronomen, um die Himmelsbewegungen auf der Grundlage einer wahren Zeit zu messen.”

Newtons wahre, absolute, mathematische Zeit verstreicht für alle und an allen Orten gleich, kontinuierlich und regelmässig. Ihr Gang kann nicht beeinflusst werden etwa dadurch, dass man heizt, sich beschleunigt oder auf den Mond fliegt. Zwei verschiedene Beobachter messen für denselben Vorgang immer dasselbe Zeitintervall (bis auf Ungenauigkeiten infolge der Unvollkommenheit ihrer Uhren). Auch Atomuhren müssen im Labor genau gleich ticken wie im Orbit. Eine Uhr ist perfekt, wenn die Ableitung der angezeigten Zeit nach der wahren Zeit konstant ist, wenn die entsprechende zweite Ableitung also null ist.

Auf diese wahre und absolute Zeit bezogen wird die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse zu einer absoluten Tatsache. Sie ist unabhängig vom Standort oder vom Bewegungszustand der Beobachter. Die Zeit fliesst für alle gleich, so wie die Sonne scheint auf Gerechte und Ungerechte.

### **Newtons Raum**

Beim Raum oder dem Ort ist die Sache etwas komplizierter, obwohl Newton ebenfalls einen wahren und absoluten Raum postuliert [02-28] :

“Der absolute Raum, seiner Natur nach ohne Beziehung zu etwas Äusserem, bleibt immer gleich und unbeweglich. Ein relativer Raum ist für diesen Raum ein Mass bzw. eine beliebige bewegliche Dimension, die von unseren Sinnen durch ihre Lage zu den Körpern bestimmt wird und von den gewöhnlichen Leuten anstelle des unbeweglichen Raumes benutzt wird, wie zum Beispiel die durch ihre Lage zur Erde bestimmte Dimension eines Raumes unterhalb der Erdoberfläche, eines Raumes in der Atmosphäre oder eines Raumes im Himmel. Der zu einem Körper gehörende absolute und der zu demselben Körper gehörende relative Raum sind der Gestalt und der Grösse nach identisch, aber sie bleiben nicht immer der Zahl nach identisch. Nämlich wenn sich die Erde bewegt, um ein Beispiel anzuführen, so wird der Raum unserer Atmosphäre, der relativ und bezüglich der Erde gesehen immer derselbe bleibt, von dem absoluten Raum bald der eine Teil sein, bald von ihm ein anderer Teil, und so wird er sich, absolut gesehen, beständig verändern.”

Und auf der nächsten Seite [02-29] :

“So, wie die Anordnung der Zeitintervalle unveränderlich ist, ist auch die Anordnung der Raumteile unveränderlich. Sollten sich diese aus ihren Orten heraus bewegen, dann werden sie sich gewissermassen aus sich selbst heraus bewegen. Denn die Zeiten und Räume sind sozusagen die Orte ihrer selbst und aller Dinge. Alles befindet sich hinsichtlich der Aufeinanderfolge in der Zeit, hinsichtlich der Ordnung der Lage im Raum. Das Wesentliche an ihnen ist, dass sie Orte sind, und dass sich primäre Orte bewegen, ist absurd. Diese sind also absolute Orte, und nur die Verlagerungen aus solchen Orten heraus sind absolute Bewegungen.”

Im Gegensatz zur absoluten Zeit, der wir hilflos ausgeliefert sind, können wir uns aber im absoluten Raum bewegen. Newton sieht klar, dass man dabei drei Fälle unterscheiden muss:

1. Beschleunigte Bewegungen längs einer Geraden: Sie lassen sich leicht erkennen an den dabei auftretenden Trägheitskräften.
2. Rotationen relativ zum absoluten Raum: Sie sind erkennbar an den Fliehkräften, die dabei auftreten. Es ist diese Absolutheit der Rotation (Rotation relativ wozu eigentlich??), welche Newton von der Existenz eines absoluten Raumes überzeugt hat. Bei seiner berühmten Beschreibung des Eimerversuches [02-30f] betont er, dass er diesen Versuch selber durchgeführt habe.
3. Gleichförmige Bewegungen entlang einer Geraden: Sie sind dadurch gekennzeichnet dass bei ihnen keine zusätzliche Kräfte auftreten. Es lässt sich mechanisch also prinzipiell nicht feststellen, ob man im absoluten Raum ruht oder ob man sich durch diesen mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

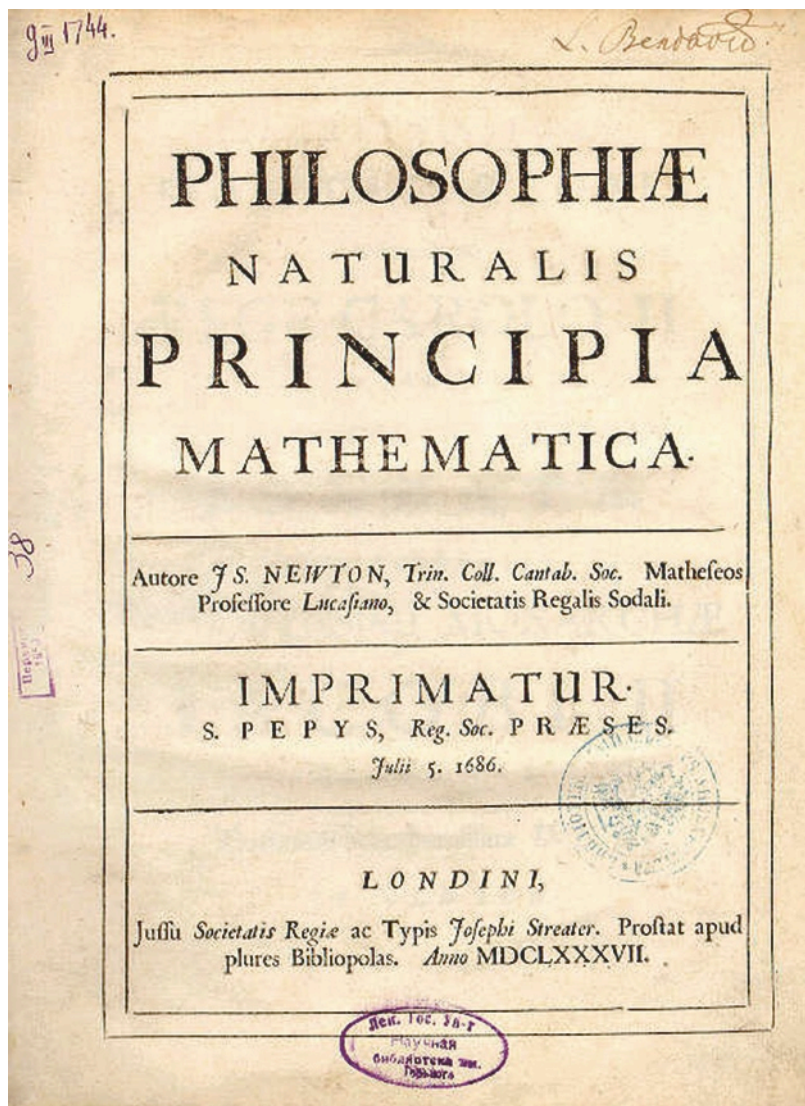
Dies führt uns zum wichtigen Begriff des Inertialsystems.

## Inertialsysteme

Räumliche Koordinatensysteme, welche nicht beschleunigt sind und nicht rotieren, nennt man Inertialsysteme. Es sind dies also diejenigen Koordinatensysteme, welche in Newtons absolutem Raum ruhen oder sich darin gleichförmig bewegen. Solche Koordinatensysteme sind alle gleichermassen geeignet, mechanische Vorgänge zu beschreiben: Nur in solchen Koordinatensystemen braucht man keine 'Scheinkräfte' einzuführen.

Eine oft verwendete praktische Definition eines Inertialsystems ist die folgende: Inertialsysteme sind solche Koordinatensysteme, die sich relativ zu den Fixsternen nicht bewegen. Warum ist diese Definition streng genommen vollkommen unbrauchbar ?

Längen, Abstände und Winkel können aber in beliebigen, auch nicht-inertialen Koordinatensystemen gemessen werden, alle Beobachter werden dieselben Werte messen, genau so, wie sie für einen dynamischen Vorgang (ein Ziegel fällt vom Dach auf die Strasse) dieselbe Zeitdauer messen werden. Die Länge eines Objektes hängt auf keinen Fall davon ab, wie schnell es sich beispielsweise bewegt.



## Newtons Massen

Jeder materielle Körper ist mit einer bestimmten Masse ausgestattet, welche sich darin zeigt, dass sich der Körper dagegen sträubt, beschleunigt zu werden:  $F = m \cdot a$ . Die für eine bestimmte Beschleunigung  $a$  benötigte Kraft ist direkt ein Mass für die träge Masse  $m$  des Körpers. Newton unterscheidet sorgfältig zwischen der trägen und der schweren Masse, und er hat eigene Versuche angestellt, um sich davon zu überzeugen, dass die träge und die schwere Masse eines Körpers immer proportional sind zueinander [02-23] :

“... Ich meine im folgenden mit den Ausdrücken ‘Körper’ bzw. ‘Masse’ ohne Unterschied diese Materiemenge. Man kennt diese durch das Gewicht des jeweiligen Körpers. Denn ich habe mit Hilfe sehr genau durchgeführter Pendelversuche herausgefunden, dass sie dem Gewicht proportional ist, wie später noch gezeigt werden wird.”

Diese Materiemenge ist natürlich vom Bewegungszustand des Körpers unabhängig, ebenso wie zB vom Luftdruck oder von der Temperatur. Die Masse eines Körpers ist eine Konstante, die ihm zugeordnet ist, solange er nicht etwa zerstückelt wird.

Dass die träge und die schwere Masse eines Körpers einander proportional sind (wobei der Proportionalitätsfaktor nur von den gewählten Masseinheiten abhängt und daher auch 1 sein könnte) ist für Newton eine nicht erklärbare Tatsache, die er sogar misstrauisch mit Experimenten geprüft hat [02-303ff]. Im Abschnitt **G2** auf p.102 werden wir sehen, dass Einstein die Gleichheit der trägen und der schweren Masse zum Grundprinzip erhebt, sie ist dann kein Faktum mehr, welches erklärt werden muss, sondern ein Axiom.

Ort, Zeit und die Masse eines Körpers sind die Grundbegriffe, auf denen Newton seine Mechanik aufgebaut hat. Alle anderen mechanischen Grössen lassen sich auf diese drei zurückführen (machen Sie das zB für den Druck !). Dass Ort, Zeit und Masse fundamental sind, spiegelt sich auch darin, dass die zugehörigen Masseinheiten (Sekunde, Meter und Kilogramm) bis 1983 Basisgrössen waren. Pendel, Massstab und Gewichtsstein sind deshalb auch die Insignien des American Institute of Physics!

Tatsächlich werden sich alle drei dieser Basisgrössen im Rahmen der Relativitätstheorie als ‘relativ’ herausstellen; von Newtons absoluter Zeit und seinem absoluten Raum wird wenig übrigbleiben. Auch die Unabhängigkeit der trägen Masse vom Bezugssystem muss aufgegeben werden. Etwas hart könnte man das auch so formulieren: Die scheinbar selbstverständlichen Grundannahmen von Newton haben sich allesamt als Vorurteile herausgestellt. Dies zu erkennen und auszusprechen brauchte doch eine gewisse Kühnheit nach dem enormen Erfolg der Newton’schen Mechanik!



## A2 Das Relativitätsprinzip von Galileo Galilei

Newton war nicht der erste, der festgestellt hat, dass es keine Möglichkeit gibt, innerhalb der Mechanik zu entscheiden, ob sich ein Objekt oder ein Koordinatensystem im absoluten Raum bewegt oder ob es darin ruht. Wir kennen die Situation heute alle aus dem Alltag: Fährt *unser* Zug oder derjenige auf dem Gleis nebenan ?

Galileo Galilei hat diese Tatsache in seinem berühmten "Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme" auf seine blumige Art beschrieben und war dabei wohl auch nicht der erste. Die italienische (!) Originalausgabe [03] erschien 1632 und wurde 1641 ins Lateinische übersetzt. Auf deutsch ist das Buch anno 2006 vergriffen, auf Englisch hingegen werden drei verschiedene Ausgaben angeboten! Der folgende Abschnitt stammt aus der Übersetzung [04] von Emil Strauss, einem Lehrer an einem Realgymnasium in Frankfurt, der 1892 kurz nach dem Abschluss der Übersetzungsarbeiten im Alter von 33 Jahren an einer Lungenentzündung gestorben ist:

"Schliesst Euch in Gesellschaft eines Freundes in einen möglichst grossen Raum unter dem Deck eines Schiffes ein. Verschafft Euch Mücken, Schmetterlinge und ähnliches fliegendes Getier; sorgt auch für ein Gefäss mit Wasser und kleinen Fischen darin; hängt ferner oben einen Eimer auf, welcher tropfenweise Wasser in ein zweites enghalsiges darunter gestelltes Gefäss träufeln lässt. Beobachtet nun sorgfältig, solange das Schiff stille steht, wie die fliegenden Tierchen mit der nämlichen Geschwindigkeit nach allen Seiten des Zimmers fliegen. Man wird sehen, wie die Fische ohne irgendwelchen Unterschied nach allen Richtungen schwimmen; die fallenden Tropfen werden alle in das untergestellte Gefäss fliessen. Wenn Ihr Eurem Gefährten einen Gegenstand zuwerft, so braucht Ihr nicht kräftiger nach der einen als nach der anderen Richtung zu werfen, vorausgesetzt, dass es sich um gleiche Entfernungen handelt. Wenn Ihr, wie man sagt, mit gleichen Füssen einen Sprung macht, werdet Ihr nach jeder Richtung hin gleich weit gelangen. Achtet darauf, Euch all dieser Dinge sorgfältig zu vergewissern, wiewohl kein Zweifel obwaltet, dass bei ruhendem Schiffe alles sich so verhält. Nun lasst das Schiff mit jeder beliebigen Geschwindigkeit sich bewegen: Ihr werdet - wenn nur die Bewegung gleichförmig ist und nicht hier- und dorthin schwankend - bei allen genannten Erscheinungen nicht die geringste Veränderung eintreten sehen. Aus keiner derselben werdet Ihr entnehmen können, ob das Schiff fährt oder stille steht. Beim Springen werdet Ihr auf den Dielen die nämlichen Strecken zurücklegen wie vorher, und wiewohl das Schiff aufs schnellste sich bewegt, könnt Ihr keine grösseren Sprünge nach dem Hinterteile als nach dem Vorderteile zu machen: Und doch gleitet der unter Euch befindliche Boden während der Zeit, wo Ihr Euch in der Luft befindet, in entgegengesetzter Richtung zu Eurem Sprunge vorwärts. Wenn Ihr Eurem Gefährten einen Gegenstand zuwerft, so braucht Ihr nicht mit grösserer Kraft zu werfen, damit er ankomme, ob nun der Freund sich im Vorderteile und Ihr Euch im Hinterteile befindet oder ob Ihr umgekehrt steht. Die Tropfen werden wie zuvor ins untere Gefäss fallen, kein einziger wird nach dem Hinterteile zu fallen, obgleich das Schiff, während der Tropfen in der Luft ist, viele Spannen zurücklegt. Die Fische im Wasser werden sich nicht mehr anstrengen müssen, um nach dem vorangehenden Teile des Gefässes zu schwimmen als nach dem hinterher folgenden; sie werden sich vielmehr mit gleicher Leichtigkeit nach dem Futter begeben, auf welchen Punkt des Gefässrandes man es auch legen mag. Endlich werden auch die Mücken und Schmetterlinge ihren Flug ganz ohne Unterschied nach allen Richtungen fortsetzen. Niemals wird es vorkommen, dass sie gegen die dem Hinterteil zugekehrte Wand gedrängt werden, gewissermassen müde von der Anstrengung, dem schnellfahrenden Schiffe nachfolgen zu müssen, und doch sind sie während ihres langen Aufenthaltes in der Luft von ihm getrennt. ... .." [04-197f]

Wir können das etwas nüchterner zusammenfassen:

Bewegt sich ein Koordinatensystem B geradlinig-gleichförmig in Bezug auf ein Inertialsystem A, so ist auch B ein Inertialsystem. Oder: Zwei Inertialsysteme können sich nur geradlinig-gleichförmig zueinander bewegen. Es ist nicht feststellbar, ob eines der beiden in einem absoluten Raum ruht. Wir formulieren dies als Relativitätsprinzip von Galilei:

**Alle Inertialsysteme sind mechanisch vollkommen gleichberechtigt.**

Das allgemeine Relativitätsprinzip erhält man, wenn man die Einschränkung auf die Mechanik weglässt:

**Alle Inertialsysteme sind vollkommen gleichberechtigt.** Die physikalischen Gesetze nehmen in allen Inertialsystemen dieselbe Gestalt an, inklusive den Werten der darin auftretenden Konstanten.



## A3 Maxwells Theorie des Elektromagnetismus ist inkompatibel

Einstein hat immer sehr grundsätzlich gedacht und argumentiert. In diesem Abschnitt soll herausgearbeitet werden, welche Risse oder Widersprüche im Gebäude der Physik er mit seiner Speziellen Relativitätstheorie (SRT) beheben wollte.

Stellen Sie sich den Kellner im Speisewagen eines Zuges vor, der mit 100 km/h auf einer langen geraden Strecke dahingleitet. Der Kellner bewege sich mit 5 km/h im Speisewagen in und gegen die Fahrtrichtung des Zuges. Welche Geschwindigkeiten hat er dabei eigentlich ?

Wir lernen daraus zweierlei: Erstens ist es offensichtlich, dass Geschwindigkeiten relative und nicht absolute Grössen sind. Sie beziehen sich immer auf ein bestimmtes Koordinatensystem. Wir haben die Wahl, ob wir unser Koordinatensystem am Speisewagen festmachen oder an den Eisenbahnschwellen. Sitzen wir 'in Ruhe' im Speisewagen, so bewegt sich der Schaffner mit  $\pm 5$  km/h vor und zurück.

Schon Galilei und Descartes war es aber klar, wie schnell sich der Schaffner in einem Bezugssystem bewegt, in welchem die Schienen ruhen und der Zug sich mit 100 km/h bewegt. Die Geschwindigkeiten des Zuges und diejenige des Schaffners relativ zum Zug addieren sich einfach: Er bewegt sich mit 105 km/h oder mit 95 km/h, in jedem Fall in Fahrtrichtung des Zuges. Wir lernen also zweitens, dass sich in der Newton'schen Mechanik Geschwindigkeiten einfach addieren. (Sind die Geschwindigkeiten nicht parallel wie in unserem Beispiel, so müssen nicht nur die Vorzeichen, sondern auch die Richtungen berücksichtigt werden. Die Geschwindigkeiten sind dann als Vektoren zu addieren.)

Wir werden in **D1** die Korrektheit dieser Geschwindigkeitsaddition innerhalb der Newton'schen Mechanik noch formal beweisen. Der Beweis zeigt schön, wie insbesondere die Idee der absoluten Zeit dabei vorausgesetzt wird.

### Wo ist denn das Problem?

Dem Physiker James Clerk Maxwell gelang es ab 1856, die reichen Forschungsergebnisse von Michael Faraday und anderen zu den Gebieten der Elektrizitätslehre und des Magnetismus in wenigen Formeln zusammenzufassen. 1862 publizierte er diese erstmals in seiner Abhandlung "On Physical Lines of Forces", 1873 erschien dann in zwei Bänden sein Hauptwerk "A Treatise on Electricity and Magnetism". Maxwell erkannte rein mathematisch, dass seine Gleichungen es erlauben, dass sich ein elektrisches und magnetisches Feld wellenartig im Raum ausbreiten. Schon 1886 konnte dann Heinrich Hertz die Existenz solcher elektromagnetischer Wellen experimentell nachweisen.

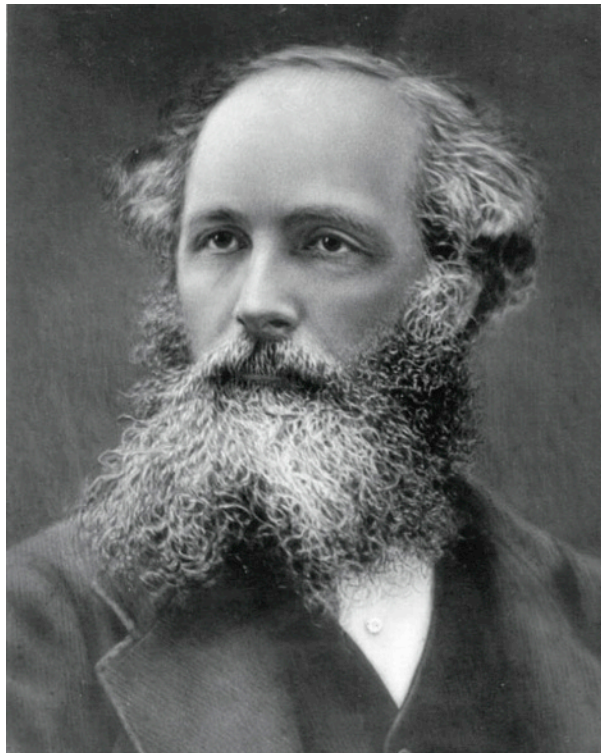
Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen im Vakuum ergibt sich rein mathematisch der Ausdruck

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

wo  $\epsilon_0$  die Elektrische Feldkonstante ist, die z.B. auch im Kraftgesetz von Coulomb auftritt, und  $\mu_0$  die entsprechende magnetische Feldkonstante bedeutet. Schon Maxwell ist es natürlich aufgefallen, dass dieser Wert genau der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum entspricht (welche sich übrigens nur ganz wenig von derjenigen in Luft unterscheidet). Das bedeutet aber, dass auch diese Lichtgeschwindigkeit eine Naturkonstante sein muss, genauso wie die elektrische und die magnetische Feldkonstante!

In der wunderschönen Theorie von Maxwell, die ja aus einer grossen experimentellen Basis herausdestilliert worden ist und die sich auch nachher experimentell glänzend bestätigte, ist also die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum eine Naturkonstante. Wenn das Relativitätsprinzip nicht nur für die Mechanik gilt, so gelten die Maxwellschen Gleichungen genauso in jedem beliebigen Inertialsystem, mit denselben Werten der auftretenden Naturkonstanten. Die Lichtgeschwindigkeit wäre also eine Konstante, deren Wert in jedem Inertialsystem derselbe wäre. Das nach vorne abgestrahlte Licht der vorwärts fahrenden Lokomotive müsste genau gleich schnell sein wie dasjenige einer stillstehenden oder gar rückwärtsfahrenden! Die Lichtgeschwindigkeit sollte also vom Bewegungszustand der Lichtquelle unabhängig sein. Dies steht aber im Widerspruch zur Addition der Geschwindigkeiten, wie wir sie eben als Tatsache innerhalb der Newtonschen Mechanik präsentiert haben.

Die Newton'sche Mechanik, das allgemeine Relativitätsprinzip und Maxwells Theorie des Elektromagnetismus sind als Paket unvereinbar!



James Clerk Maxwell (1831 - 1879)

Um das Dilemma noch deutlicher zu beschreiben, benützen wir die folgenden Abkürzungen:

- N** Newtons Mechanik mit absoluter Zeit und absolutem Raum
- R** Allgemeines Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt
- M** Maxwells Theorie des Elektromagnetismus

Man kann nicht **N**, **R** und **M** gleichzeitig haben. Aus **N** und **R** folgt die Addition von Geschwindigkeiten, das Licht der vorwärtsfahrenden Lok müsste sich im Geleisesystem mit  $c + 100 \text{ km/h}$  bewegen, was nicht zu **M** passt. Denn aus **M** und **R** folgt die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, das Licht der vorwärtsfahrenden Lok hat in jedem Inertialsystem die Geschwindigkeit  $c$ , der Messwert ist unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle und des Empfängers !

### Welche Möglichkeiten bleiben jetzt ?

Man kann an **N** festhalten und **R** auf die Mechanik beschränken. Die schönen Gleichungen von **M** gelten dann unverändert nur, wenn das Bezugssystem in Newtons absolutem Raum ruht, und sie sind für andere Inertialsysteme anzupassen. Hässlich!

Es läuft beinahe auf dasselbe hinaus, wenn man an **N** und **M** festhält und **R** preisgibt. Der Experimentator hat nun die zusätzliche Aufgabe festzustellen, mit welcher Geschwindigkeit er sich durch den absoluten Raum bewegt, in welchem das Ausbreitungsmedium für die elektromagnetischen Wellen, der sogenannten Äther, ruht. Dieser Aufgabe haben sich A. Michelson und E. Morley angenommen, einem Vorschlag von Maxwell folgend.

Oder man kann versuchen, an **R** und **M** festzuhalten, muss dann aber eine 'verbesserte' Version von **N** liefern! Vor Einstein hatte niemand den Mut, diesen Weg konsequent zu verfolgen. Dennoch konnte Einstein von vielen Vorarbeiten profitieren: FitzGerald und Lorentz haben eine Formel für die 'Stauchung' der Apparate in Bewegungsrichtung der Erde durch den Äther angegeben. Lorentz hat auch schon kurz vor 1900 eine 'Lokalzeit' eingeführt, um die Ergebnisse von gewissen Experimenten zu erklären. Der grosse Mathematiker Poincaré hat für diese Transformationen 1905 den Begriff 'Lorentz-Transformationen' geprägt und (gleichzeitig mit und unabhängig von Einstein) gezeigt, dass diese mathematisch eine Gruppe bilden und dass **M** unter solchen Lorentz-Transformationen invariant ist. Die Frucht war also überreif (zur Geschichte der SRT verweise ich auf Kapitel 6 in [07]).

Man könnte sogar sagen, dass es eigentlich *ästhetische* Gründe waren, die Einstein zum Festhalten an **R** und **M** bewogen haben. Die Einleitung seines berühmten Artikels von 1905 beginnt folgendermassen:

“Dass die Elektrodynamik Maxwells - wie dieselbe gegenwärtig aufgefasst zu werden pflegt - in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z.B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, dass der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind.” [12-141]

Die Lektüre dieses Artikels setzt (mindestens im ersten Teil) keine höheren Kenntnisse in Mathematik voraus und wird dem Leser sehr empfohlen.



Einstein im Patentamt in Bern 1902

## A4 Einstein durchtrennt den Gordischen Knoten

Einstein hat **R** und **M** für uneingeschränkt gültig erklärt und gezeigt, wie man **N** modifizieren muss, damit alles widerspruchsfrei zusammenpasst. Er hat also an den Anfang seiner Theorie, die wir heute die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) nennen, die folgenden Postulate oder Prinzipien gestellt:

- R** Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Die Naturgesetze nehmen in allen Inertialsystemen dieselbe Gestalt an, inklusive dem Wert der darin auftretenden Konstanten
- M** Maxwells Elektrodynamik ist uneingeschränkt gültig

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass aus **R** und **M** sofort folgt, dass die Lichtgeschwindigkeit  $c$  in jedem Inertialsystem denselben Wert hat, mithin eine Naturkonstante ist. Im gängigen mks-Einheitensystem beträgt dieser Wert

$$c = 299'792'458 \text{ m/s}$$

Das Gleichheitszeichen ist korrekt: Seit 1983 ist der Meter keine Grundgrösse mehr, sondern er ist durch diesen Wert von  $c$  und die Sekunde *definiert* ! Die SRT liegt heute also sogar der Definition unserer Basisgrössen zugrunde. Die Absolutheit der Lichtgeschwindigkeit koppelt die Grössen Raum und Zeit in der SRT fest aneinander. Eine Sekunde Zeit entspricht einer Strecke von etwa 300'000 km Länge.

Die Kühnheit von Einsteins Vorgehen wird in vielen Lehrbüchern besungen, so auch im sehr empfehlenswerten Physikbuch [08] für Mittelschulen von Roman Sexl, Ivo Raab und Ernst Streerwitz:

“Schliesslich trat im Jahre 1905 ein bis dahin unbekannter technischer Experte des Eidgenössischen Patentamtes Bern mit einer neuen Idee an die Öffentlichkeit. Sein Name war Albert Einstein, und sein Artikel ‘Zur Elektrodynamik bewegter Körper’ ging von der Idee aus, dass man die Erdbewegung durch den Äther vielleicht deswegen nicht messen könne, weil der Äther gar nicht existiert!” [08-10]

Wilhelm Wien hat 1912 allerdings vorgeschlagen, den Nobelpreis für Physik zu gleichen Teilen Lorentz und Einstein zuzusprechen:

“Von einem rein logischen Gesichtspunkt muss die Relativitätstheorie als eine der bedeutendsten Leistungen der theoretischen Physik betrachtet werden. ... [Sie] wurde in induktiver Weise entdeckt, nachdem alle Versuche fehlgeschlagen waren, eine absolute Bewegung festzustellen. ... Während Lorentz als der erste betrachtet werden muss, der den mathematischen Inhalt des Relativitätsprinzips fand, gelang es Einstein, es auf ein einfaches Prinzip zurückzuführen. Man sollte daher die Verdienste der beiden Forscher als vergleichbar ansehen ...” [07-152]

Einstein hätte dieser Darstellung sicher zugestimmt, selber hat er auch nur *eine* der 5 Arbeiten seines ‘annus mirabilis’ als ‘recht revolutionär’ bezeichnet, nämlich diejenige zur Photonenhypothese! Als Einstein 1921 seinen schon fast überfälligen Nobelpreis endlich erhielt, ist bei der Begründung auch jene Arbeit speziell hervorgehoben worden. Einstein hat von Lorentz immer nur mit der grössten Hochachtung gesprochen. Alle 5 Arbeiten sind übrigens mit guten Einleitungen versehen von John Stachel herausgegeben worden in [12].



Albert Einstein und Hendrik Antoon Lorentz (1921)

Für den Aufbau der SRT kann man das Postulat **M** auch durch die spezielle Forderung ersetzen, dass  $c$  eine Naturkonstante sei. In den folgenden Kapiteln soll nun detailliert gezeigt werden, wie sich aus dem allgemeinen Relativitätsprinzip und der Konstanz von  $c$  die SRT ableiten lässt. Zum Glück benötigt eine vollständige Darstellung der SRT nur bescheidene Mathematikkenntnisse. Wir werden dabei nicht derart zu kämpfen haben wie Kepler, der in seiner Einleitung zur "Neuen Astronomie" schreibt:

"Ich selber, der ich als Mathematiker gelte, ermüde beim Wiederlesen meines Werkes mit den Kräften meines Gehirns, indem ich den Sinn der Beweise, den ich doch selber ursprünglich mit meinem Verstand in die Figuren und den Text hineingelegt habe, aus den Figuren heraus mir in meinem Verstand wieder vergegenwärtigen will. Beuge ich der schweren Verständlichkeit des Stoffes durch eingestreute Beschreibungen vor, so erscheine ich in mathematischen Dingen schwatzhaft, und das ist der entgegengesetzte Fehler." [06-19]

## A5 Anregungen

Damit ein solches Buch nicht einen furchterregenden Umfang bekommt muss vieles, was auch interessant wäre, weggelassen werden. Auf einen Teil dieses Materials möchte ich mit diesen 'Anregungen' aufmerksam machen.

1. Lesen Sie Biographien! Kopernikus, Kepler, Galilei und viele andere haben nicht nur grosse Beiträge geleistet, sondern waren überhaupt interessante Menschen.
2. Lesen Sie Originalpublikationen oder wenigstens Teile davon. Gerade die grundlegenden Überlegungen sind meist nicht in der Geheimsprache der Mathematik gehalten. Kopernikus, Kepler, Galilei und Newton sind oft mit Genuss zu lesen.
3. Lesen Sie die Einleitungen anderer Bücher zur SRT. Diese beginnen meist mit dem Ätherproblem und den Präzisionsversuchen von Michelson und Morley zur Messung der Erdbewegung durch den Äther. Sie kennen ja jetzt das Prinzipielle und laufen daher nicht Gefahr, sich in den Details zu verlieren.
4. Lesen Sie, was sich Max Planck vom Physikprofessor Ph. von Jolly 1874 anhören musste, als er sich nach den Aussichten eines Physikstudiums erkundigte [13-721]
5. 1900 erschien Sigmund Freuds Buch "Traumdeutung". Es markiert den zeitparallelen Einbruch von vermeintlichen Sicherheiten in einem ganz anderen Gebiet.
6. Ebenfalls um 1900 begannen sich Munch und andere von den 'schönen' Impressionisten abzusetzen, in der Musik taucht bei Ravel und anderen das Unheimliche auf.
7. 1899 publizierte Hilbert seine "Grundlagen der Geometrie". Später stellte er die Forderung auf, die Vollständigkeit und die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik zu beweisen. Kurt Gödel hat dann aber 1930 bewiesen, dass diese Sicherheit nicht gewonnen werden kann.
8. Russel und Whitehead haben in derselben Zeit auf logische Mängel in der Mengenlehre hingewiesen und 1905/10 in ihrem Wälzer 'principia mathematica' versucht, die Logik und die Mengenlehre auf ein sichereres Fundament zu stellen.
9. 1900 hat Planck seine Herleitung des Strahlungsgesetzes publiziert und darin die Idee der Quantisierung der Energie benützt. Das Revolutionäre dabei ist allerdings erst mit dem Artikel Einsteins von 1905 zur Photonenhypothese richtig aufgebrochen.
10. Studieren Sie das Verhalten eines teilweise gefüllten Glases im anfahrenen Zug oder auf einem sich drehenden Plattenteller. Mittelschulmathematik genügt, um die Form der Oberfläche in Abhängigkeit der Beschleunigung oder der Winkelgeschwindigkeit herzuleiten. Lesen Sie den Abschnitt in Newtons 'Principia' zum Eimerversuch.
11. Stellen Sie sich in einem Lift auf eine Waage und fahren Sie etwas hinauf und hinunter.
12. Studieren Sie den Pendelversuch nach Foucault für einen Durchführungsort a) am Nordpol b) am Äquator und c) in mittleren Breiten. Er zeigt, dass die Erde 'absolut' rotiert.
13. Wie müsste der Pendelversuch nach Foucault wohl ausgehen, wenn es nur die Erde und sonst keine weiteren Himmelskörper im ganzen Weltall gäbe?



Kurt Gödel und Albert Einstein in Princeton 1954



Spiral Galaxy Messier 83 (VLT ANTU + FORS1)

ESO PR Photo 41/99 (29 November 1999)

© European Southern Observatory

## **B Die drei fundamentalen Konsequenzen**

Das Festhalten am Relativitätsprinzip und den Maxwell-Gleichungen hat drei fundamentale Konsequenzen: Die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse verliert ihren absoluten Charakter, verschiedene Beobachter werden für einen Vorgang auch nicht mehr unbedingt dieselbe Dauer messen, und die Distanz zweier Punkte (oder die Länge eines Objekts) verliert ihre Absolutheit. Eine experimentelle Bestätigung dieser Grundphänomene wird zweimal diskutiert. Schliesslich wird noch hergeleitet, um welchen Betrag Uhren einem bewegten Beobachter desynchronisiert erscheinen, wenn sie in ihrem Ruhesystem synchronisiert sind.

## B1 Primo: Gleichzeitigkeit ist relativ

Schon viel Tiefsinniges wurde über das Wesen der 'Zeit' geschrieben. Die Erkenntnis, die für Einstein den Durchbruch bedeutet hat, tönt zuallererst aber sehr banal: Zeit ist das, was man an einer Uhr vor Ort abliest:

**Zeit ist das, was man an einer lokalen Uhr abliest.**

Wirklich tiefe Einsichten sind nicht immer auf den ersten Blick als solche erkenntlich ...

Zuerst wollen wir uns davon überzeugen dass es möglich ist, mehrere gleichartige Uhren, die in einem Inertialsystem an verschiedenen Orten ruhen sollen, zu synchronisieren. Meist wird dazu die folgende Methode vorgeschlagen: Zwei Uhren befinden sich in A respektive B. Man löse in der Mitte der Strecke AB einen Blitz aus, beide Uhren werden beim Eintreffen des Blitzes auf 0000 gestellt und gestartet.

Aber: Wie synchronisiert man jetzt eine dritte Uhr C mit derjenigen in A, ohne dass die Synchronisation von A und B verloren geht? Und ist das Finden der Streckenmitte nicht selber schon ein Problem? Dieses 'Standard-Verfahren' ist eigentlich völlig unbrauchbar.

Die folgenden Überlegungen zeigen, dass es ohne weiteres möglich ist, beliebig viele Uhren mit einer Uhr in A zu synchronisieren: Die 'Mutteruhr' in A sendet zu einem beliebigen, aber bekannten Zeitpunkt  $t_0$  einen Blitz aus. Sobald dieser bei der Uhr B eintrifft, wird er erstens reflektiert, zweitens stellt er die Uhr in B auf 0000 und drittens wird die Uhr in B gestartet. Die Uhr A hält den Zeitpunkt  $t_1$  fest, wann der reflektierte Blitz aus B wieder in A eintrifft. Man rechnet die Laufzeit  $(t_1 - t_0)/2$  für das Licht von A nach B aus, notiert den Wert  $t_0 + (t_1 - t_0)/2$  auf einen Zettel und schickt diesen per Schneckenpost nach B. Die (laufende) Uhr in B wird dann um diesen Wert vorgestellt. Die Mitte von AB braucht man dafür gar nicht, zudem erhält man nebenbei noch den Abstand der beiden Uhren.

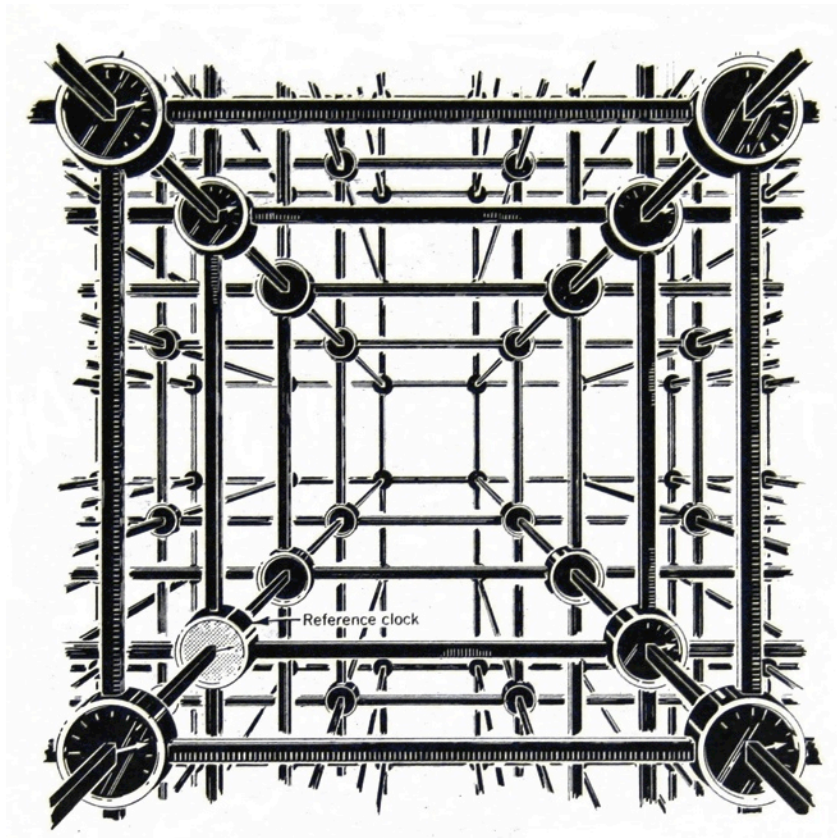
Hans Reichenbach hat in verschiedenen Publikationen ab 1920 darauf hingewiesen, dass dieser Definition implizit eine weitere Annahme zugrunde liegt, nämlich diejenige der Isotropie des Raumes. Insbesondere soll die Lichtgeschwindigkeit in allen Raumrichtungen gleich gross sein. Das Messen der Einweg-Lichtgeschwindigkeit setzt eben schon synchronisierte distante Uhren voraus, weshalb sich die Definition der Synchronisierung von distanten Uhren und das Messen der Einweg-Lichtgeschwindigkeit zirkulär aufeinander beziehen. Bei der Berechnung der Laufzeit für das Licht von A nach B mit  $(t_1 - t_0)/2$  haben wir vorhin stillschweigend angenommen, dass das Licht für den Hinweg gleich viel Zeit braucht wie für den Rückweg! In dieser Annahme hat sich das Postulat der Isotropie versteckt. Diese Zusammenhänge sind im Buch "Concepts of Simultaneity" von Max Jammer (John Hopkins University Press 2006) sehr klar dargestellt. Auf p.218 finden sich dort zwei einfache Axiome, welchen ein Satz von Uhren genügen muss, damit er in unserem Sinne synchronisiert werden kann:

1. Sendet eine Uhr A im Abstand  $\Delta t_A$  zwei Lichtsignale aus, so muss jede weitere Uhr B diese im zeitlichen Abstand  $\Delta t_B$  empfangen mit  $\Delta t_B = \Delta t_A$
2. In jedem Dreieck ABC muss die Laufzeit des Lichtes von A über B und C zurück nach A dieselbe sein wie diejenige von A über C und B zurück nach A

Die erste Forderung muss sicher erfüllt sein, wenn synchronisierte Uhren auch synchronisiert bleiben sollen. Sie ist offensichtlich nur von Uhren erfüllbar, die relativ zueinander ruhen! Die zweite Forderung (sie wird auch 'round trip axiom' genannt) garantiert, dass die Lichtgeschwindigkeit richtungsunabhängig ist. Die beiden Axiome zusammen sind notwendig und hinreichend dafür, dass ein Satz von Uhren synchronisiert werden kann.

Da wir das Postulat der Isotropie des Raumes in **B3** ohnehin benötigen, soll es schon an dieser Stelle in die SRT eingeführt werden. Seine operationelle Formulierung findet es also im 'round trip axiom'.

Man kann also in einem Inertialsystem an beliebigen Orten Uhren haben, die alle im obigen Sinne synchronisiert sind. Den Zeitpunkt eines Ereignisses messen heisst, den Uhrenstand auf einer solchen synchronisierten Uhr **am Ort des Geschehens** ablesen. Damit gelangt man zu einer hard-waremässigen Vorstellung eines Inertialsystems, wie sie in [11-37] dargestellt ist:



Copyright © 1992 by Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler

Was *sieht* man eigentlich in diesem Gerüst von Uhren auf dem Zifferblatt einer weit entfernten Uhr?

Von Einsteins Analyse der Zeitmessung können wir allgemeiner lernen, dass man bei jedem physikalischen Begriff die folgenden drei Aspekte nie ganz trennen kann:

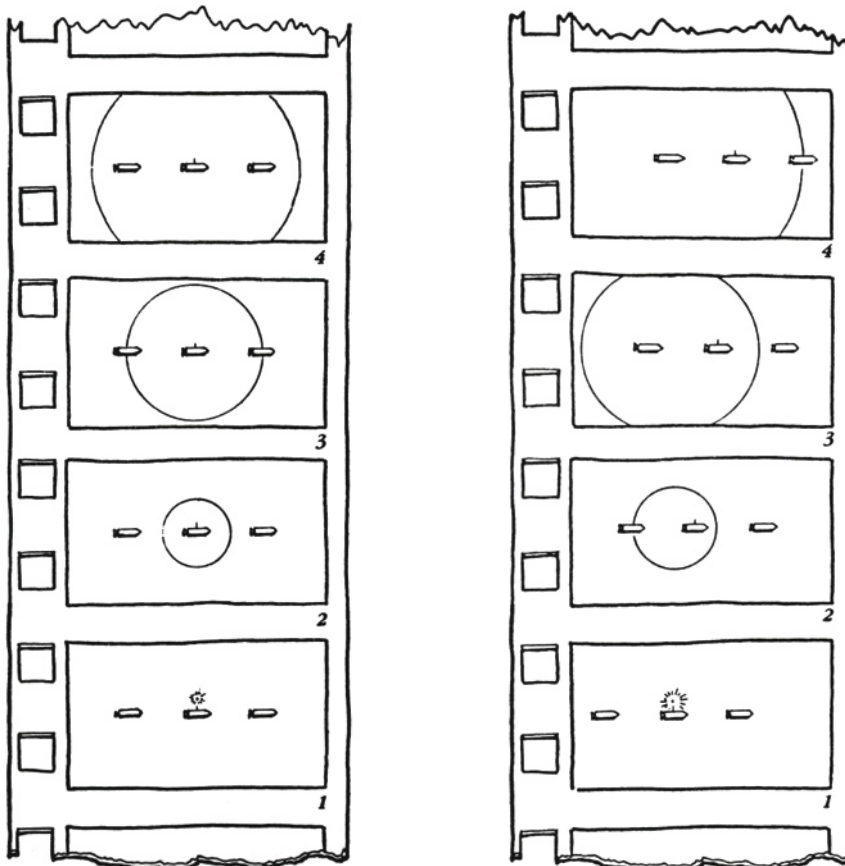
- Definition des Begriffes
- Definition der Masseinheit, in der man die Grösse messen will
- Definition der Methode, mit der man die Grösse messen will

Der entscheidende Beitrag von Einstein zur Entwicklung der SRT ist eigentlich die Einsicht, dass dieser **operationelle Zugang** alle Schwierigkeiten ausräumt.

In einem Inertialsystem können wir also mit *einer* Zeit auskommen. Wir werden daher von *der* Zeit  $t$  in einem Inertialsystem sprechen dürfen. Verschiedene Inertialsysteme haben aber in der Regel verschiedene Chronologien für Ereignisse. Die Darstellung von Epstein [10-50ff] zeigt das sehr schön. Er betrachtet dazu eine interstellare Patrouille von drei Raumschiffen, die in konstantem Abstand hintereinander durch den Raum treiben:



Es gibt ein Inertialsystem, in welchem die drei Raumschiffe ruhen. Ein Funkruf des Flaggschiffs erreicht in diesem Inertialsystem die anderen beiden Raumschiffe gleichzeitig (Movie-Streifen links, von unten nach oben zu lesen). Für einen Betrachter in einem Inertialsystem, in welchem sich diese Flotte bewegt, erreicht dagegen der Funkspruch das vorausfliegende Raumschiff später als das nachfolgende (Movie-Streifen rechts)! Dies ist eine unmittelbare Folge davon, dass sich der Funkspruch in jedem Inertialsystem in alle Richtungen mit der konstanten Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet.



Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein

Der rechte Streifen ist allerdings quantitativ nicht ganz korrekt gezeichnet.  $c$  scheint hier etwas grösser zu sein als links, und vor allem bewegt sich die Flotte nicht gleichförmig, was man mit einem Lineal leicht prüfen kann.

Aus dem Postulat, dass  $c$  in jedem Koordinatensystem denselben konstanten Wert habe, dass sich Licht- oder Funksignale in jedem Inertialsystem mit derselben Geschwindigkeit in alle Raumrichtungen ausbreiten sollen, folgt also sofort, dass es nur innerhalb *eines* Inertialsystems Sinn macht zu sagen, dass zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden.

Im Buch "La science et l'hypothèse" schreibt Poincaré schon 1902 :

"Es gibt keine absolute Zeit; wenn man sagt, dass zwei Zeiten gleich sind, so ist das eine Behauptung, welche an sich keinen Sinn hat und welche einen solchen nur durch Übereinkommen erhalten kann. Wir haben nicht nur keinerlei Anschauung von der Gleichheit zweier Zeiten, sondern wir haben nicht einmal diejenige von der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse, welche auf verschiedenen Schauplätzen vor sich gehen." [07-133]

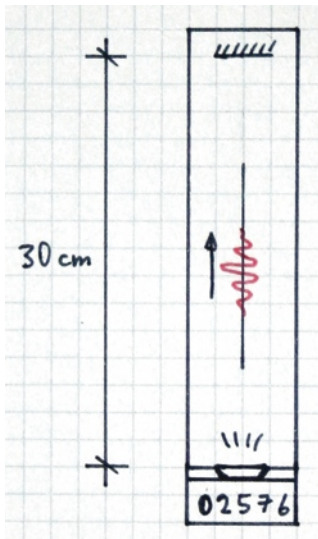
Einstein und seine Freunde Solovine und Habicht haben dieses Buch von Poincaré in der "Akademie Olympia" sorgfältig studiert. Mit seinen operationellen Definitionen hat Einstein die "Übereinkommen" analysiert, die es erlauben, innerhalb eines Inertialsystems von Gleichzeitigkeit zu sprechen. Ebenso klar zeigt er dabei auch, dass Uhren, die im einen System synchronisiert sind, in einem dazu bewegten System nicht synchron laufen. Auch der *Betrag* der Desynchronisation erhält einen numerisch eindeutigen Wert. Diesen quantitativen Aspekt müssen wir auf **B6** verschieben.



Die Mitglieder der "Akademie Olympia": Von links nach rechts sehen wir Conrad Habicht, Maurice Solovine und Albert Einstein um 1903

## B2 Secundo: Schnelle Uhren ticken langsamer

Es kommt aber noch schlimmer: Nicht nur der Begriff der Gleichzeitigkeit wird bedeutungslos, wenn wir Ereignisse aus zwei zueinander bewegten Inertialsystemen beobachten, auch der Fluss der Zeit selber wird unterschiedlich schnell! Für die Herleitung des quantitativen Zusammenhangs brauchen wir nur den Satz des Pythagoras.

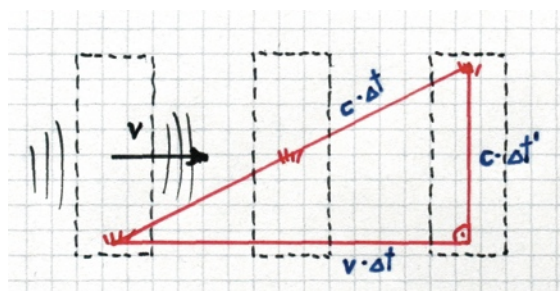


Wir gehen von der Konstanz und Universalität des Wertes von  $c$  aus und denken uns Lichtuhren von folgender Bauart:

In einem Rohr läuft ein Lichtblitz von unten nach oben zu einem Spiegel, wird dort reflektiert ("tick") und läuft zurück zum Boden. Dort wird er von einer Fotozelle registriert ("tack"), löst einen neuen Blitz aus und der Zählerstand wird um 2 erhöht. Der Zählerstand kann jederzeit ausgelesen und festgehalten werden. Überlegen Sie sich zuerst, warum die Uhr gerade 30 cm lang sein soll und warum der Zähler jeweils um 2 erhöht wird.

Stellen Sie sich weiter vor, dass wir mehrere solche Uhren zur Verfügung haben und einige davon entlang der  $x$ -Achse unseres Koordinatensystems in bekannten Abständen aufgestellt und synchronisiert sind. Eine weitere baugleiche Uhr bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$  an diesen 'ruhenden' Uhren vorbei (nur diese 'schnelle' Uhr ist unten in drei Positionen gezeichnet). Wieviel Zeit verstreicht im ruhenden System, derweil es im System der 'schnellen' Uhr einfach 'tick' macht ?

Der vom Licht zurückgelegte Weg beträgt im bewegten System, welches das 'Gestrichene' sei, also die Zeit in  $t'$  misst, einfach 30 cm oder allgemein  $c \cdot \Delta t'$ . Welchen Weg hat dieser Blitz aber aus der Sicht des ungestrichenen Systems zurückgelegt, in welchem wir die Zeit mit  $t$  angeben und gegenüber welchem sich die eine Uhr mit  $v$  entlang der  $x$ -Richtung bewegt? Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit natürlich  $c \cdot \Delta t$ . Diese beiden Weglängen sind aber nicht gleich lang, also müssen sich die Zeitintervalle  $\Delta t$  und  $\Delta t'$  unterscheiden! Der Satz des Pythagoras liefert uns den Zusammenhang zwischen den beiden Messwerten:



Im ruhenden, ungestrichenen System ist offenbar mehr Zeit verstrichen als im bewegten, das Licht hat ja dort eine längere Strecke zurückgelegt. Es gilt:

$$(c \cdot \Delta t)^2 = (v \cdot \Delta t)^2 + (c \cdot \Delta t')^2 ; c^2 \cdot (\Delta t)^2 = v^2 \cdot (\Delta t)^2 + c^2 \cdot (\Delta t')^2 ; (\Delta t')^2 = (\Delta t)^2 \cdot (1 - v^2/c^2)$$

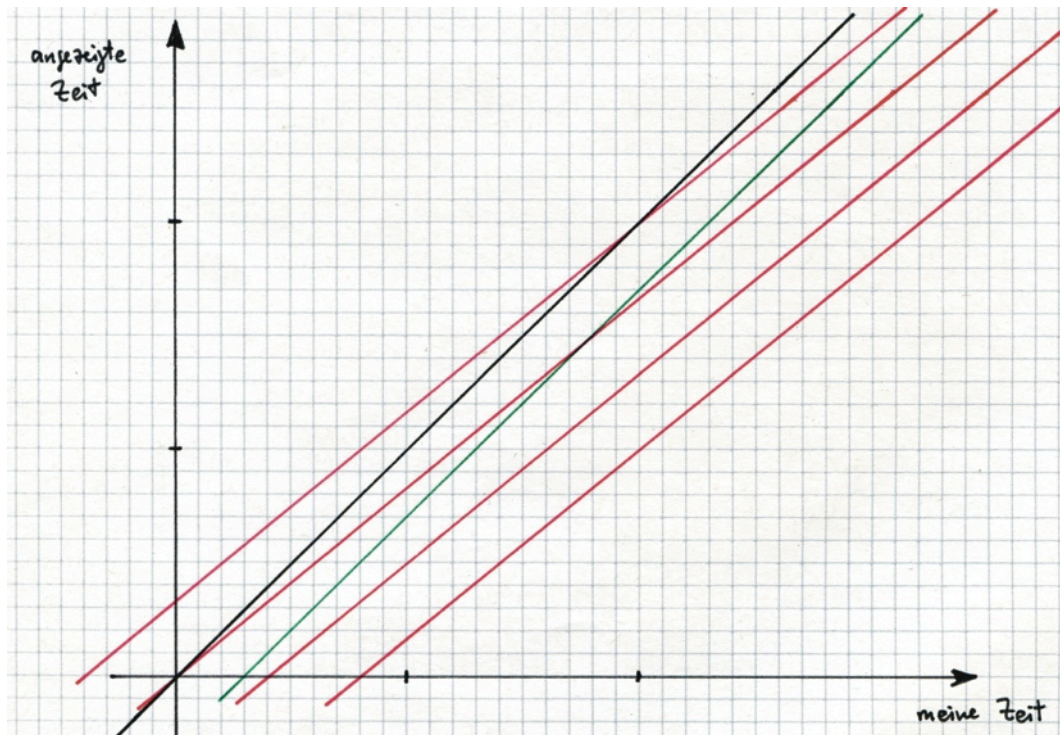
und somit

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Bewegte Uhren ticken also langsamer, verglichen mit einem Satz ruhender Uhren. Diesen Effekt nennt man die Zeitdilatation. Unter den Stichworten 'Lichtuhr' oder 'lightclock' sowie 'Zeitdilatation' oder 'time dilatation' finden Sie im Internet unzählige nette Animationen zu dieser Konsequenz des Festhaltens an **M** und **R**.

Im gestrichenen System messen wir hier die *Eigenzeit* des Vorgangs. Wir brauchen dazu typischerweise nur *eine* ruhende Uhr und nicht einen Satz synchronisierter Uhren. Die Eigenzeit ist immer die längste, die ein Vorgang in einem System beansprucht! Es gilt das *Prinzip der maximalen Eigenzeit*. Aus der Sicht des gestrichenen Systems bewegen sich ja die ungestrichenen Uhren, und diese ticken daher alle langsamer als die eigene ruhende Uhr. Wie passt jetzt aber dazu, dass wir im ungestrichenen System soeben eine längere Dauer gemessen haben? Dass sich daraus *kein* Widerspruch ergibt, wie viele immer wieder meinen, werden wir am Ende von **B6** klar erkennen. Vielleicht sehen Sie jetzt schon, wie sich dieser scheinbare Widerspruch auflöst? Wichtig dabei ist, dass wir für die Messung im einen System mindestens zwei distante Uhren brauchen ...

Von Newtons absoluter Zeit ist also wenig übriggeblieben. Es macht daher Sinn, ein Diagramm zu zeichnen, in der die von identischen, perfekten (!) Uhren angezeigte Zeit in Abhängigkeit der von meiner perfekten Uhr angezeigten Zeit dargestellt wird:

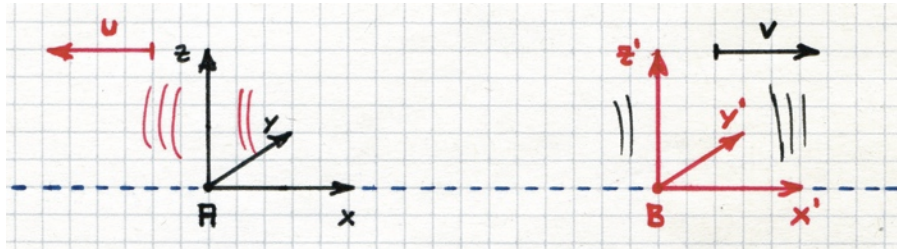


schwarz: meine Uhr und alle mit ihr synchronisierten in meinem Inertialsystem  
 grün: eine in meinem System ruhende gute, aber schlecht synchronisierte Uhr  
 rot: 'schnelle' Uhren, die in ihrem eigenen Inertialsystem synchronisiert sein können

Zeichnen Sie noch eine schlechte, aber im Grossen und Ganzen gut synchronisierte ruhende Uhr ein sowie eine zweite ruhende Uhr, die zum Zeitpunkt 10 gerichtet wird, ab dann aber zu schnell geht!

### B3 Tertio: Schnelle Massstäbe sind kürzer

Es sei A das ruhende, ungestrichene, schwarze Inertialsystem, in welchem sich das zweite, gestrichene, rote System B mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  entlang der x-Achse bewegt:



Die SRT soll in folgendem Sinne konsistent sein: A und B machen beide dieselben Aussagen darüber, welche Zeitintervalle oder Längen in A und B gemessen werden. Sie werden zwar nicht dieselben Werte messen, aber sie können sich beide ausrechnen, was der andere gemessen hat, und sind sich über diese Messwerte einig. Wir wollen daraus den folgenden wichtigen Schluss ziehen: Bewegt sich B für A mit  $v$  in positiver x-Richtung, so bewegt sich A für B mit der Geschwindigkeit  $-v$  in der  $x'$ -Richtung! Beide haben nebst der Lichtgeschwindigkeit  $c$  noch als weitere Gemeinsamkeit den Betrag der Relativgeschwindigkeit. Die meisten Autoren gehen davon aus, dass das selbstverständlich ist. Ist es das wirklich?

Wir überlegen uns, was denn sonst möglich wäre: Nehmen wir an, dass B eine Relativgeschwindigkeit  $u$  der beiden Systeme misst mit  $|u| < |v|$ . Auch A weiss dann, dass der schnelle B eine kleinere Relativgeschwindigkeit misst. Wenn der Raum isotrop ist (keine Richtungen ausgezeichnet sind) und die SRT im obigen Sinn konsistent ist, dann ist die Situation vollkommen symmetrisch, und auch B wird feststellen, dass der schnelle A eine kleinere Relativgeschwindigkeit der Systeme misst als B. Damit haben wir aber schon einen Widerspruch: Für die *Beträge* der Relativgeschwindigkeiten folgt daraus  $v < u < v$ , was nicht möglich ist. B kann also weder eine kleinere noch eine grössere Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme messen als A, es muss gelten  $u = -v$  und  $|u| = |v|$ .

Nun habe A in seinem System 2 synchronisierte Uhren im Abstand  $\Delta x$  stehen. B fliege mit der Relativgeschwindigkeit  $v$  über diese Strecke hinweg und stoppe dabei mit seiner Uhr die Zeit  $\Delta t'$ , die zwischen den Begegnungen mit den beiden Uhren von A verstreicht. B rechnet sich daraus den Abstand der beiden Uhren im System A aus:  $\Delta x' = v \cdot \Delta t'$ . Was beobachtet dabei A? A misst mit seinen beiden synchronisierten Uhren, die den Abstand  $\Delta x$  haben, ebenfalls die Zeit  $\Delta t$  zwischen den beiden Uhrenbegegnungen und rechnet sich daraus die Geschwindigkeit  $v$  von B aus:  $v = \Delta x / \Delta t$ . Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \quad \text{und somit} \quad \Delta x' = \Delta x \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \Delta x \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

wenn wir noch das Ergebnis des letzten Abschnittes verwenden. Die im System A ruhende Strecke der Länge  $\Delta x$  erscheint vom System B aus verkürzt um den uns schon bekannten Wurzelfaktor!

Nun haben wir die x-Richtung (welche mit der  $x'$ -Richtung und der Richtung der Relativgeschwindigkeit immer übereinstimmt) bevorzugt behandelt; eigentlich wissen wir erst, dass Längen von schnellen Strecken und Objekten *in Richtung der Relativbewegung* verkürzt gemessen werden. Wie verhält es sich aber in den dazu senkrecht stehenden Richtungen?

Stellen wir uns einen Einstein-Zug vor, der mit der Geschwindigkeit  $v = 0.6 \cdot c$  in x-Richtung auf einer langen geraden Bahnstrecke dahingleitet. Hat der Zug in seinem eigenen Bezugssystem die Länge 300 m, so messen wir an ihm eine verkürzte Länge von 240 m (rechne!). Ist er dabei auch schmaler geworden? Wenn ja so müsste er ab einer bestimmten Geschwindigkeit zwischen die (ruhenden) Geleise fallen. Das wäre ja immerhin möglich. Würden sich schnelle Objekte aber quer zur Bewegungsrichtung kontrahieren, so würde das aus der Sicht der Reisenden im Zug bedeuten, dass der Schienenabstand kleiner geworden ist! Und wir hätten die Situation, dass die Theorie verlangt, dass die Spurweite gleichzeitig zu gross *und* zu klein ist. Und dies ist definitiv nicht möglich: Es gibt also keine 'Querkontraktion'.

Fassen wir zusammen: Schnelle Objekte erscheinen in Bewegungsrichtung verkürzt (Schlagwort 'Längenkontraktion'). Die am ruhenden Objekt gemessene Länge ist immer die längste, es gilt das *Prinzip der maximalen Eigenlänge*. Senkrecht zur Richtung der Relativbewegung stimmen die Messwerte der Beobachter überein. Es gelten also die folgenden Formeln:

$$\Delta x' = \Delta x \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

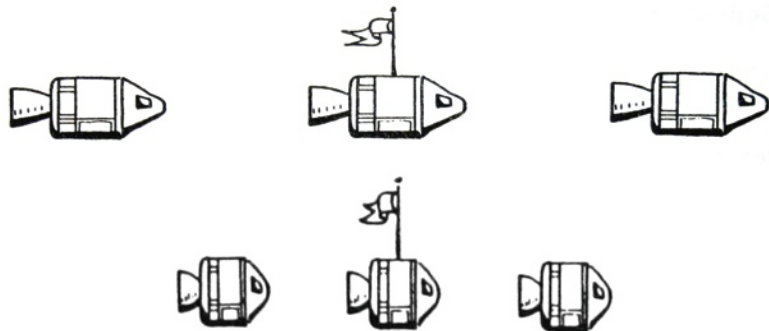
$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

Zudem stimmt der Wert des Wurzelausdrucks für beide Bezugssysteme überein, da das Quadrat der Relativgeschwindigkeit in beiden Bezugssystemen denselben Wert annimmt.

Dass es keine Querkontraktion gibt ist übrigens ganz wesentlich für unsere Argumentation in **B2** auf p.23 ! Andernfalls wäre der vom Licht zurückgelegte Weg senkrecht zu  $v$  nicht in beiden Systemen gleich lang, und wir hätten keine eindeutige Länge der entsprechenden Kathete. Die senkrecht stehende Lichtuhr wird also nur schmaler, nicht kürzer oder länger. Da haben wir ja nochmals Glück gehabt ...

Epstein's kleine Flotte sieht also, wenn sie einmal ruht und ein zweites Mal sehr schnell an einem Beobachter vorbeizieht, etwa so aus ( Abbildungen [10-58] ):



Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein

## B4 Eine experimentelle Bestätigung: Myonen 1

Lange Zeit existierten kaum experimentelle Bestätigungen zu Einsteins Relativitätstheorien. Dies hat sich mit der Entwicklung von Atomuhren und der modernen Elektronik ab 1960 sehr geändert, was der Relativitätstheorie als Forschungsgebiet enormen Auftrieb gegeben hat.

Eine erste Bestätigung der relativistischen Zeitdilatation fand sich in der verlängerten Halbwertszeit von schnellen Myonen (B.Rossi und D.B.Hall 1941). Diese entstehen in 10 bis 20 km Höhe über der Erdoberfläche, wenn hochenergetische Teilchen der kosmischen Höhenstrahlung auf ein Atom in der Erdatmosphäre auftreffen. Myonen unterscheiden sich von Elektronen dadurch, dass sie eine viel grössere Masse haben und instabil sind. Langsame Myonen haben eine Halbwertszeit von  $1.52 \mu\text{s}$ . Die extrem schnellen Myonen, die von der Höhenstrahlung erzeugt werden, bewegen sich fast mit Lichtgeschwindigkeit und sollten daher nach Newton während einer Halbwertszeit etwa  $1.52 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m}$  zurücklegen, also ungefähr 456 m. Misst man den Fluss solcher Myonen, so müsste sich dieser halbieren, wenn man die Höhe über Meer um 456 m vermindert. Tatsächlich nimmt er aber viel langsamer ab. Da die Myonen etwa in 15 km Höhe entstehen, müssen sie bis auf Meereshöhe 33 x diese Strecke von 456 m zurücklegen, von  $2^{33}$  erzeugten Myonen würde also nur eines den Weg bis in unseren Detektor schaffen, was ebenfalls nicht zur beobachteten Dichte des Myonenstroms passt: In Deutschland werden auf Meereshöhe pro Quadratmeter und Sekunde ca. 200 Myonen gezählt.

Quantitativ viel genauer hat man die Zeitdilatation bei Myonen 1975 am CERN getestet. Dazu wurden Myonen in grossen Mengen erzeugt und mit der Geschwindigkeit von 99.942 % von  $c$  in einem speziellen Speicherring gehalten. Es zeigte sich, dass ihre Halbwertszeit bei dieser Geschwindigkeit  $44.6 \mu\text{s}$  beträgt, in völliger Übereinstimmung mit unserer Formel von B2 (rechne!). Genaueres dazu findet sich in [08-13f].



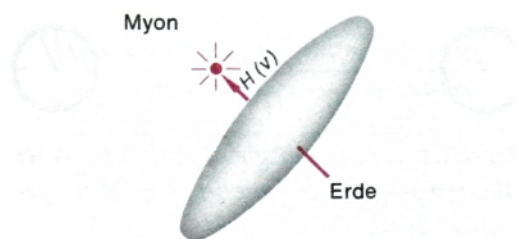
Myonen-Speicherring des Brookhaven National Laboratory, USA

## B5 Myonen 2: Die andere Sicht

Betrachten wir nochmals die Myonen, die in 15 km Höhe von der kosmischen Höhenstrahlung erzeugt werden. Im eigenen System ruht ein solches Myon und hat demnach die gewöhnliche Halbwertszeit von  $1.52 \mu\text{s}$ . Diese Zeit reicht auch bei Lichtgeschwindigkeit nur für eine Annäherung der Erde um 456 m. Warum erlebt das Myon dennoch das Eintreffen der Erdoberfläche mit grosser Wahrscheinlichkeit?

Die Zeitdilatation hilft uns hier kein bisschen. Die 15 km erstrecken sich aber in Bewegungsrichtung der Erde und erscheinen daher dem Myon 'Lorentz-verkürzt'. Mit der Formel von B3 errechnen wir für  $v = 0.99942 \cdot c$  einen Wurzelfaktor von 0.03405, die 15 km schrumpfen für das Myon auf 511 m zusammen! Diese 511 m hat die Erde in etwas mehr als der Halbwertszeit des Myons zurückgelegt, das heisst fast die Hälfte aller entstandenen Myonen erlebt noch das Eintreffen der Erdoberfläche!

Die Erde behält für das Myon die alte Querschnittfläche, der Erddurchmesser und auch die Dicke der Atmosphäre schrumpfen jedoch in Bewegungsrichtung auf 3.4% des Ruhe-Wertes, womit die Erde die Gestalt eines flachen Diskus' erhält. [08-14f] bietet zwar keine Herleitung für die Längenkontraktion, zeigt aber im Text und in einer der vielen Randillustrationen, die das Buch ja so attraktiv machen, dass diese Kontraktion eine Erklärung im System des Myons bietet. Die unten wiedergegebene Randillustration von p.15 enthält aber 2 Fehler, einen harmlosen in der Zeichnung und einen schlimmeren im Text. Finden Sie die beiden Fehler?



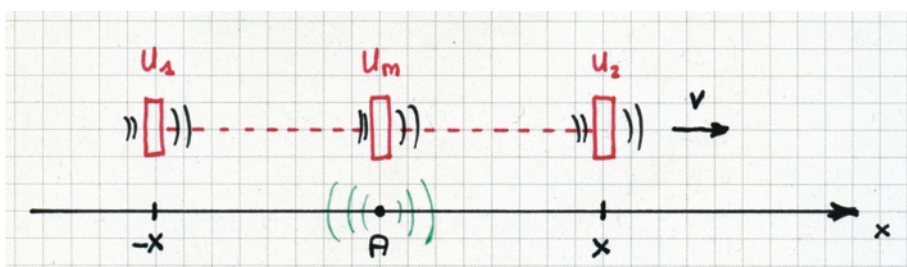
*Von den Myonen aus gesehen erscheint die Erde, die ihnen fast mit Lichtgeschwindigkeit entgegenfliegt, stark abgeplattet. Alle Abstände in Bewegungsrichtung sind verkürzt. Die Myonen können deshalb die Entfernung zur Erdoberfläche innerhalb ihrer Lebensdauer zurücklegen und die Erde erreichen.*

In beiden Darstellungen (ruhende Erde und schnelles Myon respektive ruhendes Myon und sich rasend nähernde Erde) gelangt man zu völlig übereinstimmenden Aussagen über den Anteil der Myonen, welche mit der Erdoberfläche kollidieren. Die Begründungen sind aber ganz verschieden. Die 'history', die jeder erzählt, unterscheidet sich stark von derjenigen des anderen. 'history' ist eben 'his story' ... (Wortspiel persönlich mitgeteilt von Floyd Westermann). Dennoch ergeben sich in der Physik daraus keine Widersprüche oder Konflikte.

## B6 Quantitatives zur Relativität der Gleichzeitigkeit

Wir haben in **B1** nur festgestellt, dass die Synchronisation von Uhrensätzen in verschiedenen Bezugssystemen scheitern muss. Mit **B2** würde sie ja auch wenig Sinn machen, auch wenn sie an sich für einen bestimmten Zeitpunkt noch möglich wäre. Es ist aber möglich, ganz genau anzugeben, um wieviel 2 Uhren, die im roten System B synchronisiert sind, aus der Sicht des schwarzen Systems A desynchronisiert sind. Diese Formel wollen wir jetzt herleiten. Sie erscheint in den wenigsten Büchern zur SRT, obwohl sie unverzichtbar ist, wenn man alle Teile sauber zusammenfügen will. Wir werden das bei der Musteraufgabe am Schluss dieses Abschnittes sehen.

Wir benutzen dazu drei Uhren  $U_1$ ,  $U_m$  und  $U_2$ , welche sich wie Epsteins kleine Flotte in konstantem Abstand zueinander mit  $v$  in  $x$ -Richtung des schwarzen, ruhenden, ungestrichenen Systems A bewegen sollen.  $x'$  sei der Abstand benachbarter Uhren im roten, schnellen, gestrichenen System B;  $x$  sei der entsprechende Wert, den wir im schwarzen System dafür messen.  $x'$  ist dabei als Eigenlänge grösser als  $x$ .



Genau dann, wenn  $U_m$  am Nullpunkt A von Schwarz vorbeifliegt, wird dort ein Blitz ausgelöst. Nennen wir diesen Zeitpunkt 0. Im System von Rot werden dadurch die beiden Uhren  $U_1$  und  $U_2$  synchronisiert ( $U_m$  bleibt in der Mitte von  $U_1$  und  $U_2$ , Lorentz-Kontraktion hin oder her!). Wann werden aber  $U_1$  und  $U_2$  für Schwarz von diesem Blitz getriggert?

$U_1$  fliegt dem Blitz entgegen,  $U_1$  wird vom Blitz zum Zeitpunkt  $t_1$  getroffen, wobei gilt

$$t_1 \cdot c = x - t_1 \cdot v \quad ; \quad \text{also } t_1 = x / (c + v)$$

$U_2$  fliegt dem Blitz davon,  $U_2$  wird erst zum Zeitpunkt  $t_2$  vom Blitz erreicht mit

$$t_2 \cdot c = x + t_2 \cdot v \quad ; \quad \text{also } t_2 = x / (c - v)$$

Die vordere Uhr  $U_2$  wird also für Schwarz mit der folgenden 'Verspätung' gestartet:

$$t_1 - t_2 = \dots \text{ (rechne) } \dots = -2 \cdot v \cdot x / (c^2 - v^2)$$

Das ist die Zeitdifferenz für Schwarz, der aber genau weiss, dass die roten Uhren langsamer laufen als seine. Die Zeitdifferenz der roten Uhren erhalten wir erst, wenn wir diesen Wert noch mit unserem Wurzelausdruck multiplizieren:

$$\Delta t' = (t_1 - t_2) \cdot \sqrt{\dots} = \dots \text{ (rechne) } \dots = -2 \cdot x \cdot (v/c^2) / \sqrt{\dots}$$

$2 \cdot x / \sqrt{\dots}$  ist aber genau der Eigenabstand  $\Delta x'$  der Uhren  $U_1$  und  $U_2$  ! Damit erhalten wir das recht einfache Resultat

$$\Delta t' = -\Delta x' \cdot \frac{v}{c^2}$$

Für Schwarz sind die roten Uhren, die für Rot synchronisiert sind und in der Richtung der Relativbewegung den Eigenabstand  $\Delta x'$  haben, um den Betrag  $\Delta t'$  desynchronisiert. Man kann das Resultat noch anders schreiben, man sieht dann besser, dass die Formel so einfach wie möglich geraten ist:

$$\Delta t' \cdot c = -\Delta x' \cdot \frac{v}{c}$$

Der Faktor  $c$  links des Gleichheitszeichens dient nur der Umrechnung von Zeiten in Längen. Die Desynchronisation ist damit proportional dem Eigenabstand der roten Uhren in Bewegungsrichtung und dem Verhältnis  $v/c$ .

Dass man auf diese Formel nicht verzichten kann, wenn man die ganze Situation widerspruchsfrei darstellen will, studieren wir anhand der folgenden

### **Musteraufgabe**

Ein Teilchen bewege sich mit  $v = 0.8 \cdot c$  durch ein 12 m langes Rohr, welches an beiden Enden mit Detektoren ausgerüstet ist, die auch eine Uhr enthalten, sodass man die Durchflugszeit sehr genau messen kann. Schwarz sei das System, in dem das Rohr ruht, Rot sei das System des Teilchens. Wir beantworten die folgenden Fragen:

1. Wie lange dauert der Durchflug des Teilchens durch das Rohr für Schwarz ?
2. Wie viel Zeit verstreicht dabei im roten System des Teilchens aus der Sicht von Schwarz ?
3. Wie lang ist das Rohr für Rot ?
4. Wie lange dauert es für Rot, bis das Rohr über das Teilchen hinweggerast ist ?
5. Wie viel Zeit verstreicht aus Sicht von Rot während dieses Vorbeiflugs auf jeder Uhr von Schwarz ?
6. Wie erklärt sich Rot den Messwert von Schwarz ??

Die Fragen 5 und 6 werden in den meisten Büchern weggelassen, dabei bilden sie den Schlussstein im Bogen des Verständnisses der SRT !

Die Antworten:

1. Zeit ist Weg durch Geschwindigkeit:  $\Delta t = \Delta x/v = 12 \text{ m} / (0.8 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) = 50 \text{ ns}$
2. Wegen der Zeitdilatation wird Rot eine kürzere Dauer messen:  
 $\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 50 \text{ ns} \cdot 0.6 = 30 \text{ ns}$
3. Rot sieht das Rohr Lorentz-verkürzt:  $\Delta x' = \Delta x \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 12 \text{ m} \cdot 0.6 = 7.2 \text{ m}$
4. Bis das 7.2 m lange Rohr über Rot hinweggeflogen ist verstreichen  
 $\Delta t' = \Delta x'/v = 7.2 \text{ m} / (0.8 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) = 30 \text{ ns}$  (ganz einer Meinung mit Schwarz !)
5. Die schnellen Uhren von Schwarz ticken für Rot natürlich langsamer als die eigene, im System von Schwarz dauert der Vorgang aus Roter Sicht daher nur  
 $\Delta t = \Delta t' \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 30 \text{ ns} \cdot 0.6 = 18 \text{ ns}$  ( !! )
6. Auch Rot weiss, dass Schwarz 50 ns misst, Rot führt das aber darauf zurück, dass die beiden Uhren von Schwarz um  $\Delta t = \Delta x \cdot v/c^2$  desynchronisiert sind, was numerisch genau  $12 \text{ m} \cdot 0.8 / (3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) = 32 \text{ ns}$  ausmacht. 18 ns Dauer plus 32 ns Desynchronisation ergeben zusammen die 50 ns, die Schwarz mit seinen beiden Uhren gemessen hat !!  
Prüfen Sie, dass das auch inklusive Vorzeichen richtig kommt.

## B7 Aufgaben und Anregungen

1. Berechnen Sie den Wurzelterm für verschiedene Werte von  $v$  : Für Autos, Flugzeuge, Raketen usw. Was bedeutet das für Newtons Absolute Zeit, solange man es mit 'bürgerlichen' Geschwindigkeiten zu tun hat ?
2. Wie schnell muss man sich bewegen, damit "eine Stunde nur noch 3599 s dauert" ?
3. Wie lange dauert das Rennen '24h von Le Mans' für die Rennfahrer, wenn sie sich im Schnitt (leicht übertrieben) mit 324 km/h bewegen ? Die Antwort hängt evtl. vom verwendeten Taschenrechner ab ...
4. Wie weit bewegt sich eigentlich das Licht in einer Nanosekunde ? Welche Strecke entspricht diesem heute gut messbaren Zeitintervall ?
5. Erstellen Sie eine Tabelle der Abstände der Planeten von der Sonne, wobei als Masseinheit eine 'Lichtminute' dienen soll.
6. Zwei Raketen fliegen mit  $0.6 \cdot c$  aneinander vorbei. A misst eine Länge von 40m an der anderen Rakete B. Welches ist die Eigenlänge der Rakete B, und um wieviel sind die Uhren an der Spitze und am Ende der Rakete B für A desynchronisiert, wenn sie für B synchron laufen ? Und welche der beiden Uhren geht für A nach ?
7. Wie schnell muss sich eine Uhr bewegen, damit sich ihre Ganggeschwindigkeit halbiert ?
8. Signallaufzeiten: Der Gesang von Mick Jagger wird vom Mikrofon weg gleich per Rundfunk 300 km weit zu einem Radio-Hörer übertragen. Dieser sitzt 6.8 m entfernt vom Lautsprecher. Wie lange reist das Radiosignal durch den 'Äther' ? Wie lange brauchen die Schallwellen vom Lautsprecher bis zum Ohr des Hörers ? Wie lange dauert es, bis jemand, der 'live' dabei ist und 34 m von den Lautsprechern entfernt sitzt, die Schallwellen empfängt ?
9. Was würde eigentlich mit der Länge eines Objektes geschehen, das sich mit doppelter Lichtgeschwindigkeit bewegt ? Und wie langsam würde eine derart schnelle Uhr noch ticken ??
10. Noch ein pythagoreisches Tripel: Der Wurzel Ausdruck wird auch hübsch, wenn  $v/c$  die Werte  $5/13$  oder  $12/13$  annimmt ... Das andere Paar mit  $3/5$  und  $4/5$  haben Sie ja schon kennengelernt.
11. Nochmals zwei Raketen, die mit hoher Geschwindigkeit aneinander vorbeifliegen: A misst beim Vorbeiflug, dass die beiden Raketen gleich lang sind. Was meint B ?  
a) A ist gleich lang wie B      b) A ist länger als B      c) A ist kürzer als B
12. Sind jetzt schnelle Uhren, die in ihrem System synchronisiert sind, **wirklich** synchronisiert oder nicht ? Die Frage ist ähnlich sinnvoll wie diejenige nach der Jahreszeit: Ist jetzt **wirklich** Winter oder Sommer ? Wenn Sie nicht ganz sicher sind, dann rufen Sie doch mal ihren Onkel in Australien an ...
13. (anspruchsvoll) Leiten Sie die Längenkontraktion aus der Betrachtung einer 'liegenden' schnellen Lichtuhr her! Der Lichtblitz soll also in Richtung der Relativgeschwindigkeit der Uhr hin und her flitzen. 'tick' und 'tack' dauern dann für den ruhenden Beobachter nicht gleich lang ...





Globular Cluster 47 Tucanae  
(FORS/VLT)

## C Epstein erklärt alles ganz einfach

Wir staunen über die sehr einfache Erklärung, die Epstein in [10] für alle drei Grundphänomene der SRT gibt und die er seinen 'Mythos' nennt. Einfach zu erstellende Diagramme erlauben es, sowohl die Zeitdilatation als auch die Längenkontraktion und die Desynchronisation schneller Uhren quantitativ korrekt darzustellen. Wir lösen unsere Musteraufgabe in dieser Darstellung und fassen die Ergebnisse von **B** in dieser Epstein-Darstellung zusammen.

## C1 Epsteins Mythos

1983 veröffentlichte Lewis C. Epstein sein Buch [14] "Relativity visualized". Das Buch wurde schon 1985 vom Verlag Birkhäuser auf Deutsch herausgebracht unter dem Titel "Relativitätstheorie anschaulich dargestellt" [10]. In diesem Buch öffnet Epstein tatsächlich einen neuen, sehr anschaulichen Zugang zur Relativitätstheorie, der zwar oft erwähnt, aber kaum wirklich ernst genommen wird. In den meisten Lehrbüchern werden weiterhin ausschliesslich die Minkowski-Diagramme benutzt, wenn relativistische Vorgänge aus der Sicht zweier zueinander bewegter Koordinatensysteme graphisch dargestellt werden sollen.

Hermann Minkowski hat 1908 seine berühmte Ansprache auf der 80. Versammlung der Deutschen Naturforscher und Ärzte mit den folgenden Worten begonnen:

"Meine Herren

Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund' an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren. ... " [7-151]

Er entwickelte in diesem Vortrag eine konsequent vierdimensionale Betrachtungsweise des physikalischen Geschehens, indem er die drei Raumkoordinaten und die Zeit zu einem vierdimensionalen Vektor zusammenfasste und so mindestens für die Mathematiker die SRT auf eine geometrische Art und viel anschaulicher darstellen konnte. Einstein witzelte zuerst, dass er die SRT selber nicht mehr verstehe, seit sich die Mathematiker ihrer angenommen hätten; er war sich aber später im klaren, dass mit dieser Betrachtungsweise ein grosser Fortschritt erzielt worden war.

Epstein setzt mit seinem "Mythos", auf dem er seine Darstellung aufbaut, genau an diesem Punkt an. Epstein sagt: Es scheint uns nur so, dass wir in einem dreidimensionalen Raum leben und darin unsere kleinen Ausflüge machen, die wir als Funktion der eindimensionalen Zeit darstellen können. *Tatsächlich leben wir alle in einer vierdimensionalen Raumzeit. Unsere Wahrnehmung rührt daher, dass alles und alle sich immer mit Lichtgeschwindigkeit durch diese vierdimensionale Raumzeit bewegen - und diejenige Richtung, in die wir uns bewegen, nennen wir **Zeit**, die drei anderen, die senkrecht darauf stehen, nennen wir **Raum**!* Dass wir diejenige Richtung, in der wir uns mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, nicht gleich räumlich wahrnehmen können wie die anderen, ist ja aufgrund der Lorentz-Kontraktion verständlich. In Epsteins Buch liest sich das so:

Um die Relativitätstheorie auch im Bauch zu verstehen, brauchen wir einen guten, neuen Mythos. Hier ist er:

**Warum können Sie sich nicht schneller fortbewegen als das Licht ? Warum Sie sich nicht schneller als das Licht fortbewegen können liegt daran, dass Sie dies auch nicht langsamer als das Licht tun können. Es gibt nur eine Geschwindigkeit. Alles, wir mit eingeschlossen, bewegt sich stets mit Lichtgeschwindigkeit.** Wieso können Sie sich bewegen, wo Sie doch auf einem Stuhl sitzen ? Sie bewegen sich durch die Zeit. [10-100f]

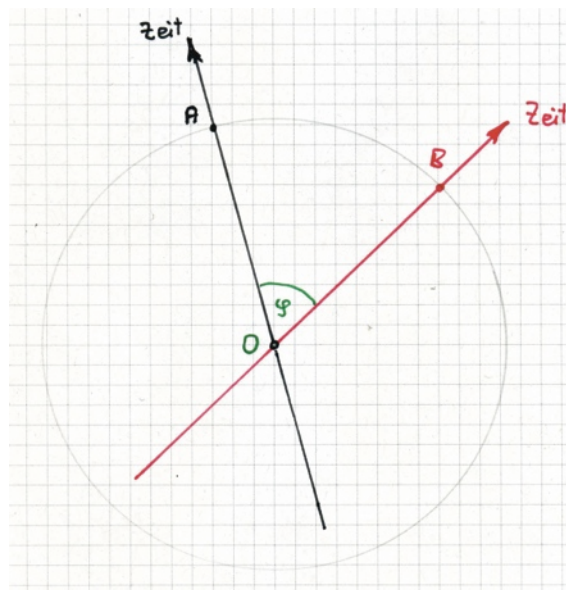
Die ganzen Phänomene der SRT ergeben sich nun daraus, dass sich nicht alle in die gleiche Richtung der vierdimensionalen Raumzeit bewegen! Wir wollen dies gleich graphisch darstellen, und wir werden sehen, dass diese Epstein-Diagramme, wie man sie nennen muss, die Phänomene nicht nur qualitativ richtig wiedergeben, sondern dass alle drei Grundphänomene auch quantitativ korrekt aus diesen Diagrammen herausgelesen werden können. Bei vielen Aufgaben braucht man nur etwas kariertes Papier, einen Zirkel und einen Massstab, man zeichnet das passende Epstein-Diagramm und schon kann man die Lösungen mit zwei oder drei gültigen Ziffern ablesen!

## C2 Epstein-Diagramme

Das Dogma lautet: Alle bewegen sich immer und überall mit  $c$  durch die 4d-Raumzeit. Jeder nennt die Richtung, in der er sich bewegt, seine Zeit, und die dazu orthogonalen Richtungen bilden seinen Raum. Eine Sekunde Zeit entspricht dabei  $299'792'458 \text{ m} \approx 300'000 \text{ km}$  Raum (man könnte sagen, dass man nicht alles schon früher gemerkt hat sei eine Folge dieses 'Missverhältnisses' ...).

Nun wollen wir diese Bewegung durch die 4d-Raumzeit graphisch darstellen und haben dabei natürlich dasselbe Problem wie alle anderen, welche vierdimensionale Sachverhalte bildlich darstellen wollen: Man muss ja schon froh sein, wenn Zeichnungen von dreidimensionalen Gebilden auf einem Blatt Papier klar verstanden werden. In unserem Fall sind diese Schwierigkeiten aber leicht auszuräumen: Wir stellen nur *eine* Raumrichtung dar, und zwar diejenige, in welcher die beiden Bezugssysteme sich relativ zueinander bewegen! In den beiden anderen Raumrichtungen geschieht ja sowieso nichts Aufregendes nach unseren Formeln von **B3** !

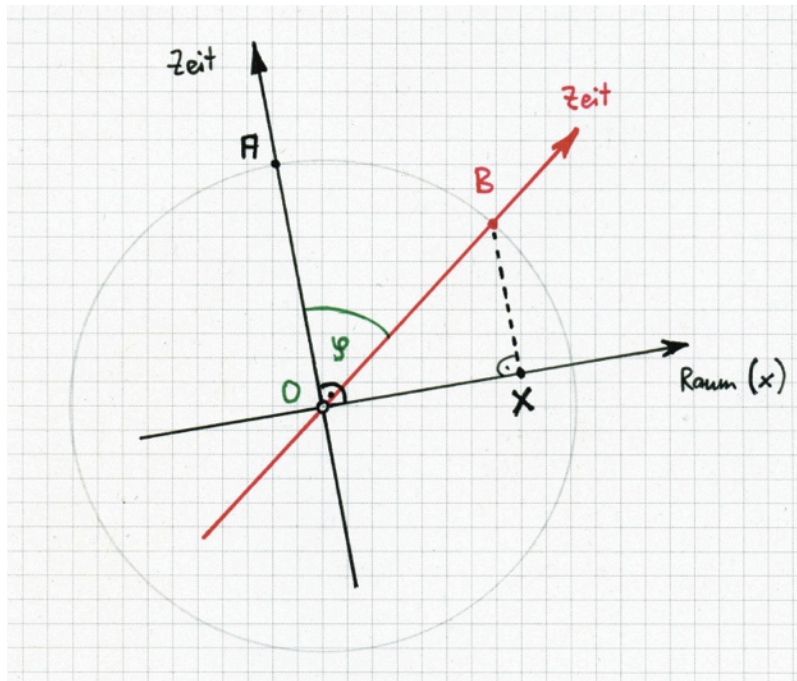
Wir werden immer ein schwarzes Koordinatensystem mit dem Ursprung A und ein rotes mit dem Ursprung B verwenden, so wie sie auf p.26 oben gezeichnet sind. B bewege sich mit  $v$  entlang der  $x$ -Richtung von Schwarz und A bewege sich mit  $-v$  entlang der  $x'$ -Richtung von Rot. A und B seien sich in O begegnet und sollen dabei beide ihre Uhren auf null gestellt haben. Jeder messe zudem mit Uhren, die im jeweiligen System mit den Mutteruhren in A resp. B synchronisiert sind. A und B ruhen räumlich beide in ihrem eigenen System und bewegen sich demnach (in ihrem eigenen System) nur durch die Zeit. Wir machen einen ersten Versuch:



Um Komplikationen mit der Kausalität zu vermeiden müssen wir verbieten, dass Rot, der in O mit A eine Wechselwirkung hatte, je in die zeitliche Vergangenheit von Schwarz *vor* O einwirken kann. Das bedeutet, dass der Winkel  $\varphi$  nicht grösser als  $90^\circ$  werden darf. Sonst könnte Rot nach einiger Zeit seine Triebwerke zünden, an den Ort von O zurückkehren und dort zu einem Zeitpunkt eintreffen, der noch *vor* der Wechselwirkung zwischen A und B liegt, die ja schon stattgefunden hat. Wir halten ausdrücklich fest:

**Für Systeme, die miteinander wechselwirken können, darf der Winkel  $\varphi$  zwischen den beiden Zeitachsen (also den Richtungen der Reise durch die 4d-Raumzeit) nicht grösser als  $90^\circ$  sein.**

Wichtig ist, dass die Strecken OA und OB gleich lang sind: Beide legen in derselben Zeit immer gleich viel Weg durch die Raumzeit zurück ! Das ist Epsteins Dogma. Welche Bedeutung hat dabei der Winkel zwischen den Zeitachsen? Zeichnen wir noch die Richtung der x-Achse von Schwarz ein und markieren die Stelle, die B in dieser x-Richtung erreicht hat, derweil Schwarz nur um die Strecke OA älter geworden ist:



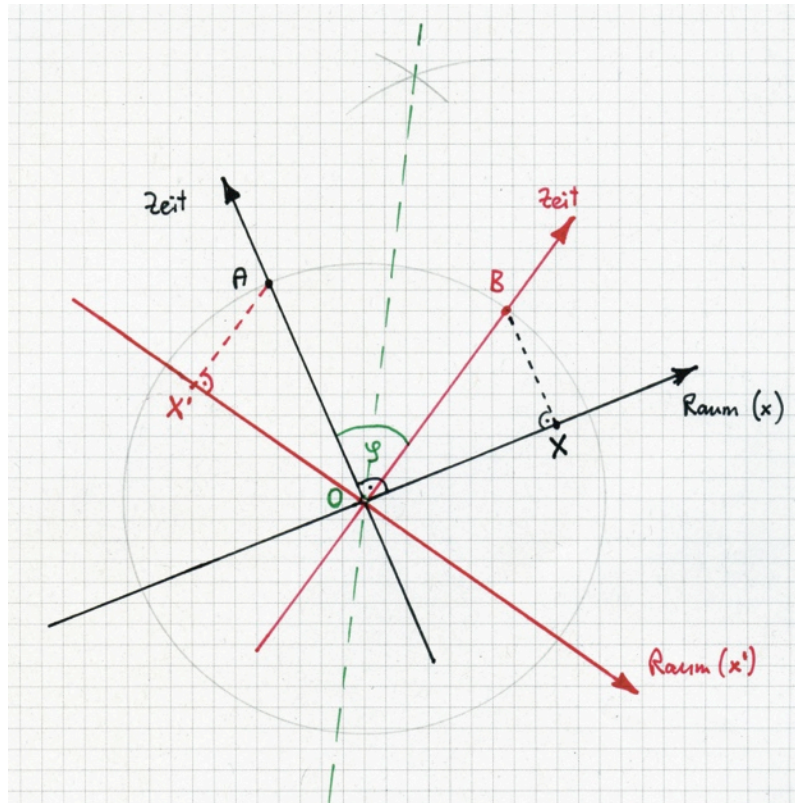
Es ist also  $OA = OB$ . OA ist für Schwarz einfach die Zeit, die seit der Begegnung mit B in O verstrichen ist. In dieser Zeit hat B aus schwarzer Sicht räumlich die Strecke OX zurückgelegt. Daraus

$$v = \frac{OX}{OA} = \frac{OX}{OB} = \sin(\varphi)$$

da ja im rechtwinkligen Dreieck OXB bei der Ecke B der Winkel  $\varphi$  wieder auftritt. Den Ort von B im Koordinatensystem von A erhalten wir also einfach, indem wir die raumzeitliche Position von B senkrecht auf den Raum von A projizieren. Dabei haben wir allerdings ein kühnes Durcheinander von Masseinheiten verwendet: OA, OB und OX sind vorerst mal Strecken in der *Raumzeit*. Bei der Reduktion auf reine Zeiten oder Distanzen müssen wir berücksichtigen, dass 1 Sekunde Zeit einer Distanz von 1 Lichtsekunde, also etwa 300'000 km entspricht! Wenn wir obenstehende Gleichung einheitenmässig sauber notieren, sieht sie folgendermassen aus:

$$\frac{v}{c} = \frac{v \cdot \Delta t}{c \cdot \Delta t} = \frac{OX}{OA} = \frac{OX}{OB} = \sin(\varphi)$$

Die einheitenfreie Zahl  $\sin(\varphi)$  entspricht also im Epstein-Diagramm dem Verhältnis von v zu c ! Nun haben wir die Sicht von Schwarz bevorzugt. Das ist unnötig, die Epstein-Diagramme haben (im Gegensatz zu den Minkowski-Diagrammen !) die schöne Eigenschaft, dass sie eine symmetrische Situation auch symmetrisch darstellen. Wir zeichnen also obiges Diagramm nochmals, dabei soll aber auch B eine Raumachse erhalten:



Sicht von A: Während der Zeit OA legt B den Weg OX zurück.  
 Sicht von B: Während der Zeit OB legt A den Weg OX' zurück.

Die beiden Dreiecke OXB und OX'A sind kongruent, in beiden Koordinatensystemen ergibt sich betragsmässig derselbe Wert für die Relativgeschwindigkeit  $v$ . Wegen den gewählten Orientierungen der Koordinatenachsen erhalten wir allerdings unterschiedliche Vorzeichen für  $v$  : Für Rot bewegt sich A in negativer  $x'$ -Richtung, während sich B für Schwarz in positiver  $x$ -Richtung bewegt. Damit erhalten wir vollständige Übereinstimmung mit der Darstellung in **B3** .

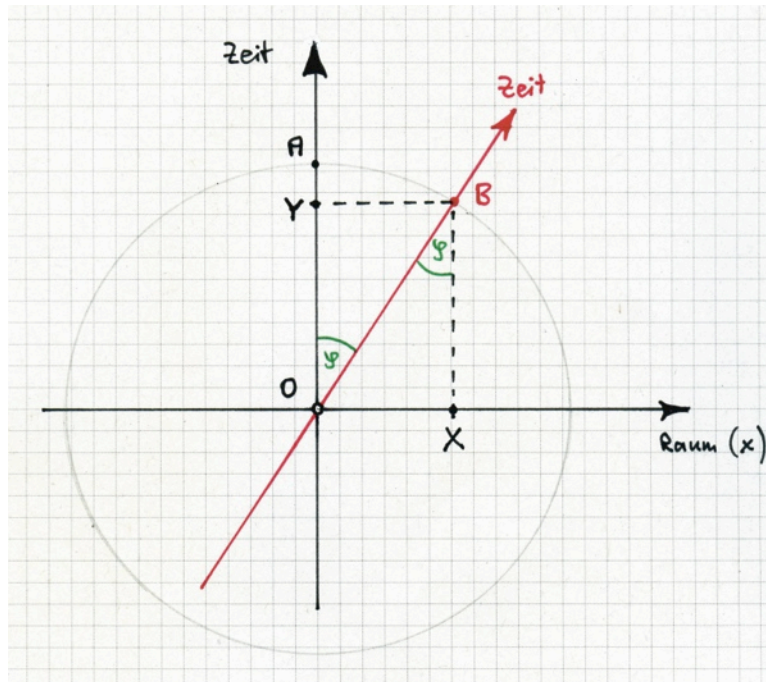
Vielleicht haben Sie sich schon gewundert, dass bei den Zeitachsen nicht  $t$  resp.  $t'$  vermerkt ist. Den Grund dafür decken wir gleich im nächsten Abschnitt auf. Zuerst wollen wir noch eine kleine Rechnung durchführen, die uns ein ganz wichtiges Ergebnis liefert. Für spitze Winkel  $\varphi$  gilt

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - \sin^2(\varphi)} = \sqrt{\cos^2(\varphi)} = \cos(\varphi)$$

Der Wurzelausdruck, der für die Berechnung der Zeitdilatation und der Längenkontraktion gebraucht wird, hat im Epstein-Diagramm eine einfache geometrische Bedeutung! Für Schwarz gesprochen:  $\sin(\varphi)$  projiziert OB auf meine Raumachse,  $\cos(\varphi)$  projiziert OB auf meine Zeitachse. Das wollen wir sofort ausbeuten.

### C3 Die Zeitdilatation im Epstein-Diagramm

B bewege sich also für Schwarz mit  $v$  in Richtung seiner positiven  $x$ -Achse. Bei der Begegnung in  $O$  haben beide ihre Uhren in  $A$  und  $B$  auf  $0000$  gestellt. Die Begegnung hat bei  $x=0$  und  $x'=0$  stattgefunden. Etwas später haben sich  $A$  und  $B$  mit Lichtgeschwindigkeit durch die Raumzeit weiterbewegt und wir haben die folgende Situation:



Nach **C2** ist  $OA = OB = c \cdot \Delta t$  und  $B$  hat sich für Schwarz räumlich nach  $X$  bewegt. Es gilt ja  $OX = OB \cdot \sin(\varphi) = (c \cdot \Delta t) \cdot (v/c) = v \cdot \Delta t$ .

Welche Bedeutung hat nun die Strecke  $OY$  ?

Es ist  $OY = OB \cdot \cos(\varphi) = OA \cdot \cos(\varphi)$

Deuten wir  $OA$  nicht mehr raumzeitlich, sondern nehmen wir ganz den Standpunkt von Schwarz ein und nennen  $OA$  'meine seit der Begegnung verstrichene Zeit'  $\Delta t$ , so stellt  $OY$  also  $\Delta t \cdot \cos(\varphi)$  dar, und das ist nach der Feststellung am Ende von **C2** nichts anderes als  $\Delta t'$ , also die Zeit, die aus der Sicht von Schwarz (und auch aus derjenigen von Rot!) seit der Begegnung in  $O$  für Rot verstrichen ist! Da  $\cos(\varphi)$  gerade dem Wurzelausdruck entspricht, den wir für die Berechnung der Zeitdilatation brauchen, kann Schwarz auf seiner Zeitachse direkt ablesen, wieviel Zeit für jeden seit der Begegnung in  $O$  verstrichen ist.

Um es noch einmal zu sagen: Schwarz projiziert einfach die raumzeitliche Position von allem und jedem auf seine Zeitachse und weiss dann, welche Zeit eine Uhr dort anzeigt, die nach der Begegnung der beiden Systeme in  $O$  vorschriftsgemäss mit ihrer Mutteruhr  $A$  oder  $B$  synchronisiert worden ist. Da die Uhren  $A$  und  $B$  bei der Begegnung auf null gestellt worden sind gilt

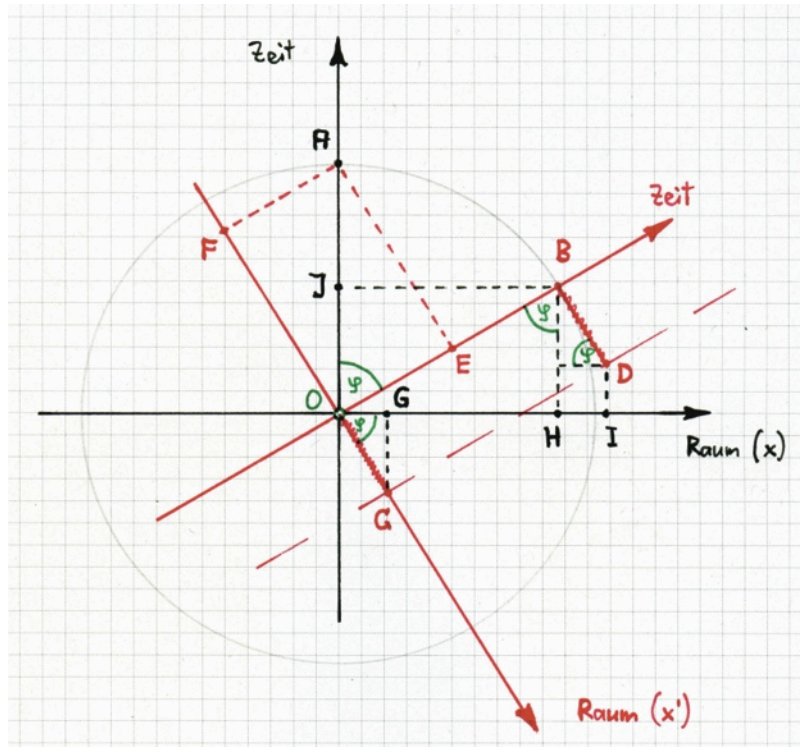
$$OA = \Delta t = t \quad \text{und} \quad OY = \Delta t' = t'$$

Wir können auf das Umrechnen mit dem Faktor  $c$  verzichten, wenn wir nur Zeiten vergleichen. Die ganze Darstellung würde ohnehin einfacher und schöner, wenn wir Längen in Lichtsekunden messen würden,  $c$  hätte dann einfach den Wert  $1$  oder '1 Licht'.

Auf seiner Zeitachse kann Schwarz also  $t$  und  $t'$  ablesen !

## C4 Die Längenkontraktion im Epstein-Diagramm

Auch die Längenkontraktion lässt sich mühelos und quantitativ korrekt im Epstein-Diagramm ablesen. Betrachten wir die folgende Zeichnung:



Was sagt Rot ?

Die Strecke  $OC$  ruht in meinem System, sie wird nur älter. Sie bewegt sich nur durch die Zeit, und zwar um  $OB = CD$ . Die Strecke hat die Länge  $OC = BD$ , das ist ihre Eigenlänge. Schwarz bewegt sich in dieser Zeit raumzeitlich natürlich gleich weit, nämlich von  $O$  nach  $A$ . Rein räumlich bewegt er sich mit  $v = -c \cdot \sin(\varphi)$  von  $O$  nach  $F$ . Dabei verstreicht bei ihm weniger Zeit, nämlich nur  $OE = OA \cdot \cos(\varphi) = OB \cdot \cos(\varphi)$

Was sagt Schwarz ?

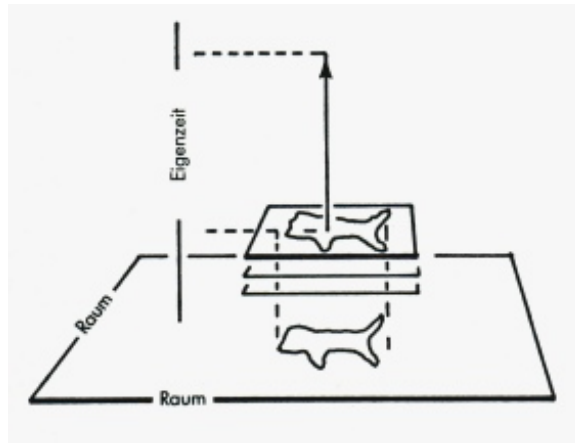
Die Strecke  $OC$  bewegt sich raumzeitlich nach  $BD$ , derweil ich einfach um  $OA$  älter werde. Die Strecke  $OC$  altert derweil nur um  $OJ = OB \cdot \cos(\varphi) = OA \cdot \cos(\varphi)$ . Ich messe an dieser Strecke eine Länge von  $OG = HI$  in der  $x$ -Richtung. Es ist  $OG = OC \cdot \cos(\varphi)$ . Rein räumlich gesprochen messe ich, dass sich eine Strecke  $OG$  mit  $v = c \cdot \sin(\varphi)$  nach  $HI$  bewegt.

Alle Aussagen stimmen vollständig mit den Ergebnissen von **B2** und **B3** überein!

Im Eigensystem hat jedes Objekt seine Eigenlänge und bewegt sich nur durch die Zeit. Das Abkippen um den Winkel  $\varphi$  bewirkt, dass die Längen von schnellen Objekten als 'Schatten' verkürzt gemessen werden, und auch das Voranschreiten der Zeit wird für diese schnellen Objekte verlangsamt. Das Schöne dabei ist, dass beide Effekte *quantitativ korrekt* wiedergegeben werden. Und: Die beiden Prinzipien der maximalen Eigenzeit und der maximalen Eigenlänge werden im Epstein-Diagramm evident!

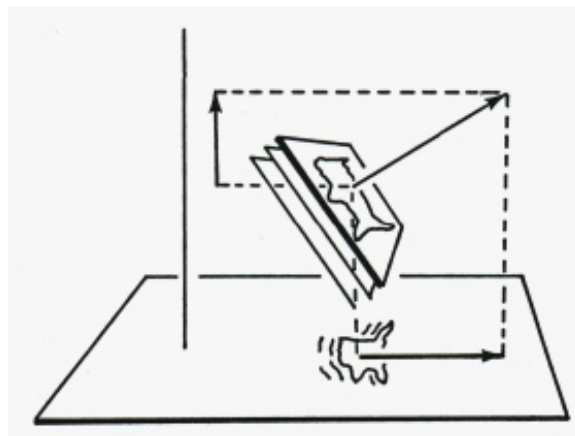
Von der Längenkontraktion ist nach **B3** nur diejenige Raumrichtung betroffen, die mit der Richtung der Relativgeschwindigkeit übereinstimmt. Epstein illustriert das mit zwei Zeichnungen [10-114]:

Die USA ruhend. Sie bewegt sich nur durch die Zeit:



Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein

Die USA beobachtet aus einem Raumfahrzeug, welches von Ost nach West über die USA hinweg rast. Die USA rasen dann für die Insassen des Raumfahrzeuges von West nach Ost, die Zeitachse der USA kippt dabei um einen Winkel  $\varphi$  ab, und die räumliche Projektion der USA schrumpft, aber nur in der Richtung der Relativbewegung:

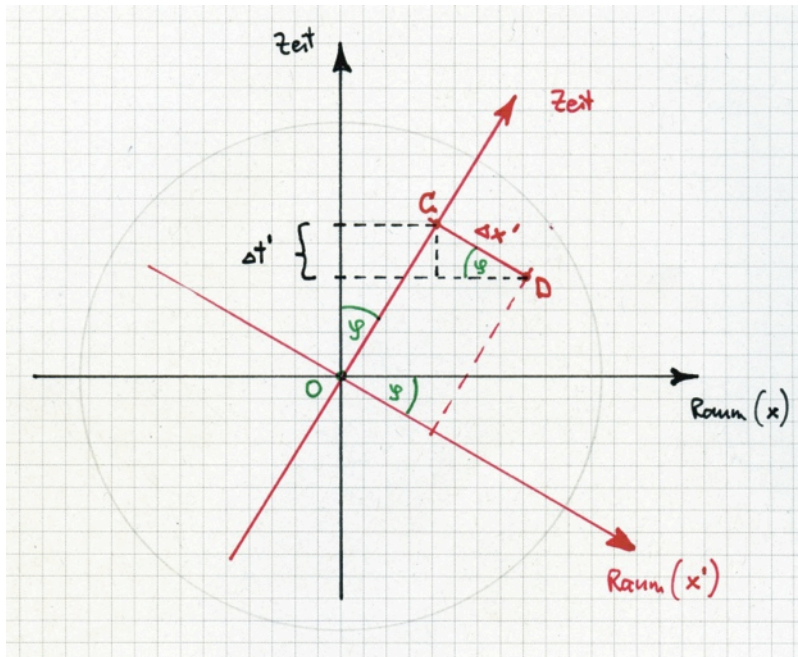


Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein

Raum und Zeit sinken tatsächlich zu Schatten herab (Zitat in **C1** !), Schatten der raumzeitlichen Bewegung, in welcher sich alle immer mit Lichtgeschwindigkeit befinden!

## C5 Die Desynchronisation im Epstein-Diagramm

Uhren, die für Rot synchronisiert sind, projizieren auf dieselbe Stelle der roten Zeitachse. Für Rot synchronisierte Uhren liegen also auf Parallelen zur roten Raumrichtung. Für Schwarz, der alle Zeiten auf seiner schwarzen Zeitachse abliest, weisen aber solche Uhren eine Zeitdifferenz auf:



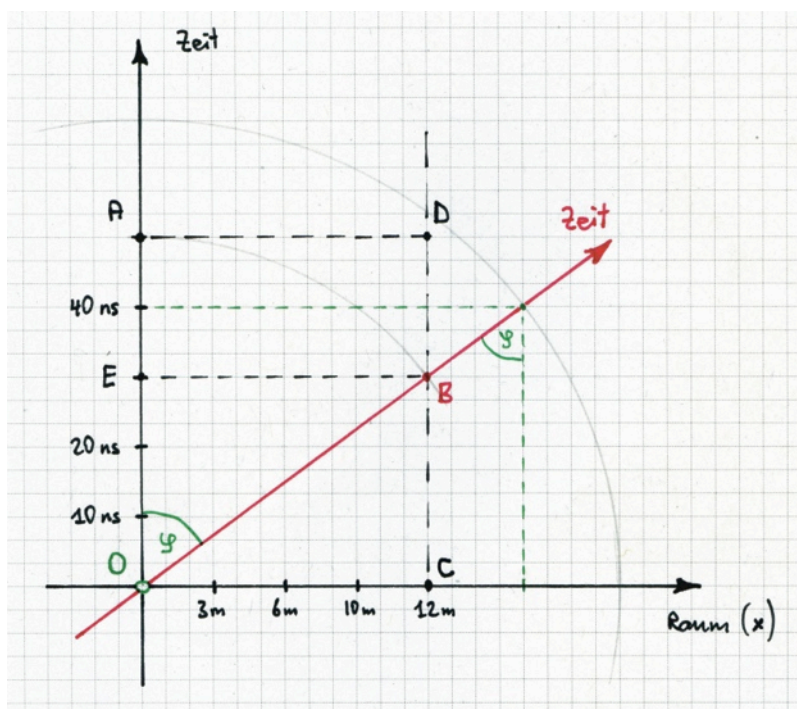
Schwarz stellt fest:  $\Delta t' \cdot c = \Delta x' \cdot \sin(\varphi) = \Delta x' \cdot v/c$ , das ist bis aufs Vorzeichen die Formel von **B6** ! Aber auch das Vorzeichen können wir ablesen: Die *vordere* Uhr von Rot geht aus der Sicht von Schwarz *nach*. Es muss also heißen  $\Delta t' \cdot c = -\Delta x' \cdot \sin(\varphi) = -\Delta x' \cdot v/c$  in vollkommener Übereinstimmung mit **B6**.

Es ist eine lohnende (also auch nicht ganz einfache) Aufgabe sich zu überlegen, wie der Versuch, vorbeifliegende distante Uhren wie in **B6** zu synchronisieren, im Epstein-Diagramm aussieht. Man muss dabei beachten, dass sich Licht in *jedem* Bezugssystem immer mit  $c$  bewegt, dass also der Quotient  $v/c$  für Licht 1 ist und damit der Winkel  $\varphi$  immer  $90^\circ$  beträgt! Licht bewegt sich in *jedem* Bezugssystem nur räumlich, parallel zur Raumachse. Und: Photonen altern nicht!

## C6 Unsere Musteraufgabe im Epstein-Diagramm

Wir wollen noch die Musteraufgabe, die wir schon am Ende von B6 auf Seite 31 gelöst haben, im Epstein-Diagramm darstellen. Damit alles möglichst einfach und klar aussieht zeichnen wir zwei Diagramme: Eines aus der Sicht von Schwarz mit ruhendem Rohr und das andere aus der 'roten' Sicht des Teilchens, welches das Rohr über sich hinwegrasen sieht.

Zuerst zum Abkippwinkel der beiden Zeitachsen: Den Sinuswert von  $v/c = 0.8$  brauchen wir nicht in einen Winkel umzurechnen. Wir müssen nur die Häuschen auf dem Papier abzählen und für den Kreisradius z.B. 20 Häuschen wählen:  $16/20 = 8/10$  liefert dann den richtigen Winkel (-> grüne Hilfslinien).



Während sich das Teilchen raumzeitlich von O nach B bewegt, altert das Rohr einfach um dieselbe Strecke, also um OA resp. CD. Die Uhren an den beiden Rohrenden sind für Schwarz synchronisiert: O und C respektive A und D projizieren auf dieselbe Stelle der schwarzen Zeitachse. Ist das Teilchen in B angelangt, verlässt es gerade das Rohr. Die Einheiten sind dabei folgendermassen gewählt: 3 Häuschen entsprechen 3 m Raum oder 10 ns Zeit ! Wichtig: Man kann nur *eine* der beiden Skalen frei wählen, die andere ist dann durch die Lichtgeschwindigkeit ebenfalls festgelegt. Wir lesen ab: Der Vorgang dauert für Schwarz  $OB = OA = 50$  ns. Derweil verstreichen für Rot nur  $OE = 30$  ns.

Soweit die Sicht von Schwarz. Nun wollen wir dasselbe aber auch noch aus der Sicht von Rot darstellen.

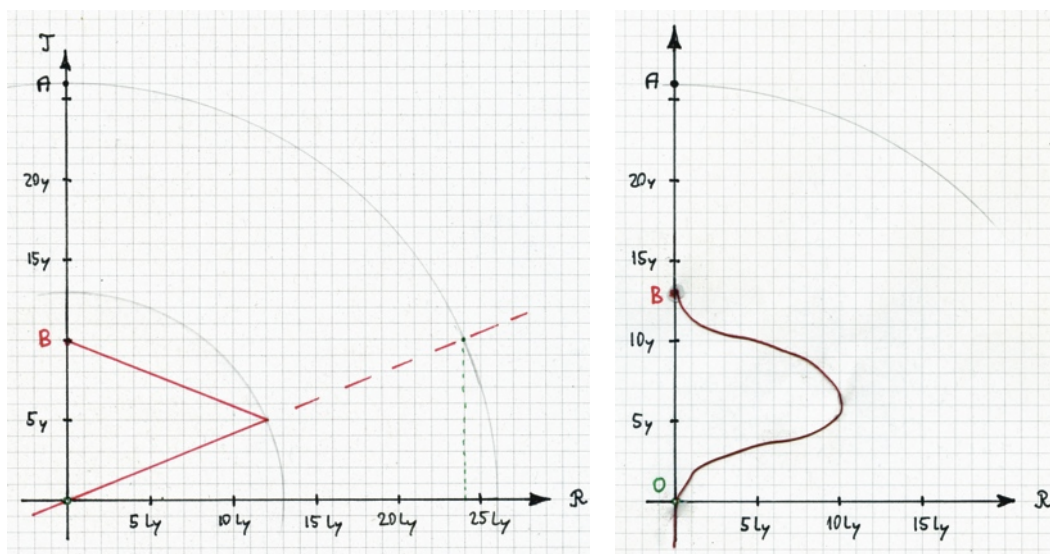


## C7 Das Zwillingsparadoxon in der Darstellung von Epstein

Die folgende Geschichte hat die Gemüter immer wieder erhitzt: Zwillinge A und B studieren beide Raumfahrt. Wenn sie beide 25 sind bricht B zu einer ausgedehnte Raumreise mit  $v = 12/13c$  auf, während A Dienst im Kontrollzentrum auf der Erde leistet. Nach 26 Jahren Erdzeit ist A gerade 51, wenn sein Bruder B von seiner Reise auf die Erde zurückkehrt. Wie alt ist dann B ?

Wir wollen die kurzen Beschleunigungsphasen beim Start, der Umkehr der Flugrichtung und bei der Landung ignorieren und nehmen an, dass B 13 Jahre mit  $v$  weggeflogen und danach 13 Jahre lang mit  $-v$  zurückgeflogen ist. Der Wurzelausdruck, also  $\cos(\varphi)$ , hat für diesen Wert von  $v/c$  den Betrag  $5/13$ , sowohl beim Hinflug als auch beim Rückflug altert B also nur um 5 Jahre. Bei der Rückkehr auf die Erde ist er demnach erst 35 Jahre alt, während sein Zwillingbruder schon seinen Einundfünfzigsten feiert.

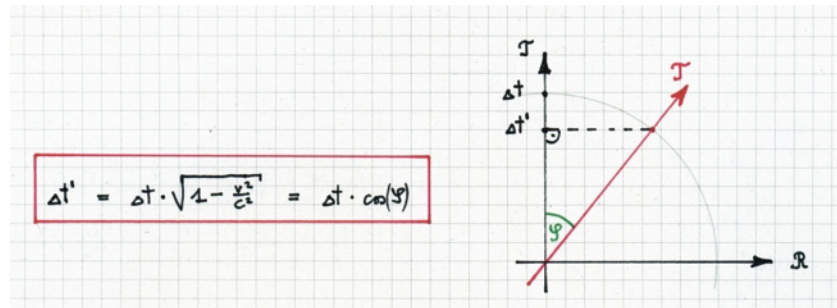
“Aus der Sicht des Raumfahrers ist doch alles gerade umgekehrt, dann müsste doch A jünger sein als B! Damit ist der ganze Schwindel dieser Relativitätstheorie schon aufgefliegen.” So oder ähnlich tönt es in hitzigen Pamphleten gegen die SRT. Tatsächlich ist der ganze Versuch aber asymmetrisch: Nur A befindet sich die ganze Zeit in Ruhe in einem Inertialsystem, während B in verschiedenen Phasen seiner Reise Beschleunigungen ausgesetzt ist. Während der unbeschleunigten Flugphasen hat tatsächlich auch B den Eindruck, dass sein Bruder A etwas retardiert wirkt. Im Epstein-Diagramm lässt sich das Ganze schön darstellen:



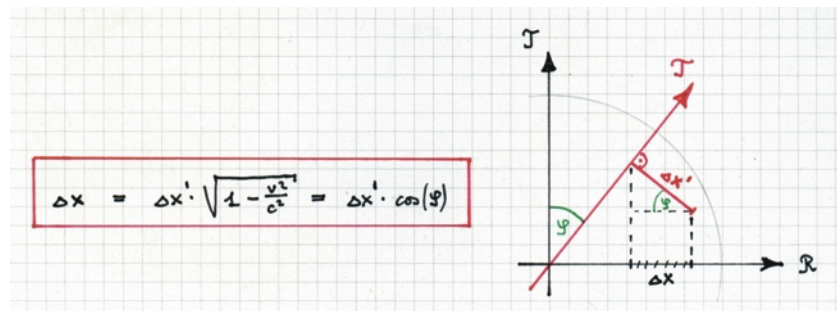
Das linke Diagramm entspricht der Darstellung im Text, das rechte ist etwas realistischer, da es die Beschleunigungsphasen berücksichtigt. Wichtig ist, dass die Wege der beiden Zwillinge durch die Raumzeit gleich lang sind: Streckt man den roten Faden, dann hat er von O bis B eine Länge von genau 26 Häuschen, ist also gleich lang wie OA. Da B einen Teil dieser Raumzeit-Strecke für den Raum beansprucht, bleibt bei ihm weniger für die Bewegung in der Zeit übrig. So einfach ist das. Vergleichen Sie diese Darstellung des Zwillings-Paradoxons mit anderen, welche dazu Minkowski-Diagramme zeichnen, z.B. in [15-64] oder [16-405] !

## C8 Zusammenfassung

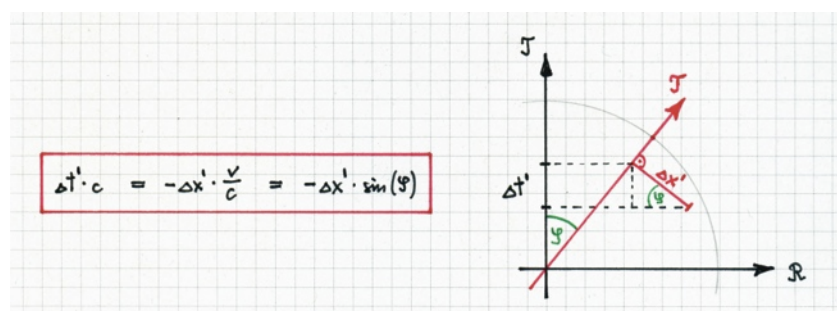
1. Zeitdilatation - Relativität der Zeitmessung - "schnelle Uhren gehen langsamer"



2. Längenkontraktion - Relativität der Längenmessung - "schnelle Massstäbe sind kürzer"



3. Relativität der Gleichzeitigkeit - die Synchronisation von relativ zueinander ruhenden Uhren ist nur innerhalb ihres eigenen Ruhesystems gültig



4. Die Formeln:

$$\sin(\varphi) = \frac{v}{c}$$

$$\cos(\varphi) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

## C9 Aufgaben und Anregungen

1. Zeichnen Sie ein Epstein-Diagramm zu einem Flugzeug B, welches mit 3240 km/h über den Kopf von A hinwegdonnert.
2. Lösen Sie die Aufgaben 6, 7 und 11 von **B7** mithilfe von Epstein-Diagrammen.
3. Wie schnell muss ein Einstein-Zug fahren, damit er mit seiner Eigenlänge von 260 m vollständig in einen Tunnel der Eigenlänge 240 m passt? In welchem System denken wir, wenn wir die Frage so formulieren?
4. Positive Pionen sind so schnell, dass sich ihre Halbwertszeit vervierfacht hat gegenüber dem Wert, den man an langsamen Pionen misst. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit dieser Pionen a) rechnerisch und b) graphisch.
5. Die berühmte Aufgabe vom 6 m langen Auto und der 6 m langen Garage, die vorne und hinten mit einem Tor versehen ist: Das Auto rase mit  $0.8 \cdot c$  durch diese Garage. Zu Beginn sei das vordere Tor geöffnet und das hintere geschlossen. Sobald das Auto ganz in der Garage steckt schliesst man das vordere Tor. Wie lange steckt das Auto ganz in der Garage? Welche Länge hat es im System der Garage? Wann muss man das hintere Tor spätestens öffnen?
6. Nochmals die Aufgabe 5, aber diesmal aus der Sicht des Autos, über welches diese seltsame Garagen-Röhre hinwegrast. Wie lang ist die Röhre? Warum meinen die Leute im System der Garage, sie könnten das Auto eine gewisse Zeit lang ganz einsperren?
7. 4 relativ zueinander ruhende Raumstationen sollen ein grosses Quadrat der Kantenlänge 1 Lichtsekunde bilden. Ein Beobachter X fliege genau diagonal längs AC über dieses Quadrat hinweg, und zwar mit  $0.8 \cdot c$ .
  - a) Welche Gestalt hat das Quadrat für X ? (Rechnung und Zeichnung)
  - b) Wie lange dauert dieser Flug von A bis C aus der Sicht der Quadratbewohner ?
  - c) Die Quadratbewohner wissen, dass X für diese Flugdauer einen anderen Wert misst. Welchen denn, und was ist der Grund dafür aus der Sicht der Quadratbewohner ?
  - d) X misst tatsächlich diesen Wert, begründet das aber ganz anders. Wie ?
  - e) Die Quadratbewohner haben ihre Uhren in A, B, C und D ja synchronisiert. Für X sind aber nur 2 dieser Uhren synchronisiert. Welche ?
  - f) Welche Fehlsynchronisation weisen die Uhren von A und B für X auf ?
8. Seit dem Urknall haben wir (so heisst es - siehe dazu auch p.139 !) etwa 14 Mia Jahre Zeit zurückgelegt. Welches Alter hat eine Galaxie heute für uns, welche sich seit dem Urknall mit  $0.9 \cdot c$  von unserer Milchstrasse entfernt ? Und wann ist das Licht von dieser Galaxie ausgesandt worden, wenn es uns heute erreicht ? Zeichnen Sie dazu ein Epstein-Diagramm!
9. B fliegt mit seinem Raumschiff geradlinig an der Erde A vorbei mit  $0.8 \cdot c$ . Auf seiner hochgenauen Armbanduhr stellt B fest, dass er 30 Minuten nach dem Vorbeiflug an der Erde eine Raumstation C passiert. Bei dieser Gelegenheit setzt er einen Funkspruch an die Erde ab. C und A ruhen relativ zueinander und haben ihre Uhren synchronisiert.
  - a) Welche Distanz haben A und C für B respektive für A ?
  - b) Welche Dauer messen die Leute in A und C für den Flug von B über diese Strecke ?
  - c) Wieviele Minuten nach dem Vorbeiflug von B an A trifft der Funkspruch von B in A ein ?Versuchen Sie sich etwas mit Epstein-Diagrammen!



Hermann Minkowski 1864–1909

»Ach, der Einstein? Der schwänzte doch immer die Vorlesungen – dem hätte ich das gar nicht zugetraut.« Diese Worte soll – ziemlich sicher verbürgt – Hermann Minkowski zu seinem Assistenten Max Born geäußert haben, als er überraschenderweise von Einsteins spezieller Relativitätstheorie Kenntnis erhielt. Denn als Minkowski Mathematikprofessor am Züricher Polytechnikum war, studierte dort Einstein ab 1896 mit der Absicht, Physiklehrer zu werden. Er betrieb sein Studium aber nicht in der üblichen Manier. Insbesondere die mathematischen Vorlesungen vernachlässigte er in auffälliger Weise. Einstein hat in späteren Jahren sehr wohl eingesehen, dass die Vernachlässigung der höheren Mathematik in seiner Studienzeit ein großer Fehler war und er sah sich dann genötigt, seine mathematischen Kenntnisse nachträglich zu erweitern.

Einstein war von Minkowskis neuen Ideen zunächst nicht beeindruckt und betrachtete die vierdimensionale Darstellung als »überflüssige Gelehrsamkeit«; er witzelte gar, seit sich die Mathematiker der Relativitätstheorie bemächtigt hätten, verstehe er sie selbst nicht mehr. Doch vier Jahre später pries er Minkowskis »wichtige Gedanken, ohne die die allgemeine Relativitätstheorie vielleicht in den Windeln stecken geblieben wäre.« Diesen späten Dank Einsteins an seinen früheren Lehrer hat Minkowski leider nicht mehr entgegennehmen können – er ist, erst 44-jährig, im Jahre 1909 in Göttingen verstorben. Seine hinterlassenen wissenschaftlichen Notizen wurden von Max Born, dem späteren Nobelpreisträger für Physik, bearbeitet und herausgegeben.

[aus <http://edoc.hu-berlin.de/cmsj/27/biener-klaus-77/HTML/22.xml> , 19. August 2006]



Spiral Galaxy NGC 3190  
(FORS/VLT)

ESO Press Photo 17/06 (11 May 2006)

© ESO

## **D Lorentz-Transformationen, Geschwindigkeits-Addition und Dopplereffekt**

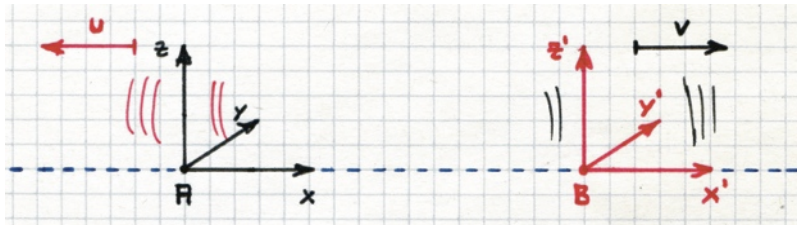
Wir untersuchen, wie sich Koordinaten zwischen verschiedenen Inertialsystemen in der Mechanik von Galilei und Newton transformieren und leiten die alte Addition von Geschwindigkeiten her. Dann machen wir dasselbe, aber unter Berücksichtigung der 3 fundamentalen Effekte der SRT. Die sogenannten Lorentz-Transformationen leiten wir gleich zweimal her: Einmal mithilfe von Epstein-Diagrammen und ein zweites mal allein mit den Formeln aus Abschnitt B. Aus den Lorentz-Transformationen gewinnen wir die relativistische Formel für die Addition von Geschwindigkeiten. Schliesslich leiten wir noch die optische Dopplerformel her.

## D1 Koordinatentransformationen vor der SRT

Ein *Ereignis* im physikalischen Sinne findet zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort statt. In jedem Bezugssystem (Koordinatensystem, Inertialsystem) können einem Ereignis also ein Zeitpunkt sowie drei Ortskoordinaten zugeordnet werden. Zu einem Ereignis gehört in jedem Koordinatensystem ein Punkt in der 4d-Raumzeit.

Wir untersuchen in diesem und den folgenden zwei Abschnitten, wie sich die die 4 Koordinaten, die ein Beobachter im einen Bezugssystem einem Ereignis zuordnet, korrekt umrechnen, damit man die 4 Koordinaten erhält, die ein Beobachter in einem anderen Bezugssystem demselben Ereignis zuordnet. Die Formeln, welche diese Umrechnung beschreiben, heissen *Koordinatentransformationen*.

Dabei gehen wir (wie bisher schon) immer davon aus, dass wir zwei Koordinatensysteme, ein schwarzes, 'ungestrichenes' und ein rotes, 'gestrichenes' betrachten, die speziell einfach zueinander ausgerichtet sind (gleiche Zeichnung wie in B3):



Der Ursprung B des roten Systems soll sich mit  $v$  entlang der  $x$ -Achse von Schwarz bewegen, und die  $x'$ -Achse von Rot soll mit der  $x$ -Achse von Schwarz zusammenfallen. Damit bewegt sich A mit der Geschwindigkeit  $u = -v$  entlang der  $x'$ -Achse von Rot. Die beiden anderen räumlichen Achsen (also  $y$  und  $y'$  respektive  $z$  und  $z'$ ) sollen immer zueinander parallel sein. Zudem sollen sowohl Rot als auch Schwarz im Moment, wo A und B zusammenfielen, die Uhren auf null gestellt haben. Alle weiteren Uhren, die Schwarz evtl. verwendet, sollen innerhalb seines Systems mit der Mutteruhr in A synchronisiert sein. Das entsprechende gelte für allfällige weitere 'rote' Uhren.

Wir überlegen uns nun, wie sich die Koordinaten innerhalb der Mechanik von Galilei und Newton umrechnen:

Da die Uhren von Rot und Schwarz bei der Begegnung übereinstimmend auf null gestellt worden sind, werden beide Uhren (und damit alle weiteren Uhren von Rot und Schwarz) immer übereinstimmen. Sie zeigen im Rahmen ihrer Ganggenauigkeit dieselbe Zeit an, Geschwindigkeiten haben keinen Einfluss auf die Synchronisation oder die Ganggeschwindigkeit von Uhren. Es gilt also in jedem Moment und für alle Orte

$$(1) \quad t = t'$$

Auch bei den Distanzen zur  $x$ -Achse, welche ja mit der  $x'$ -Achse als Gerade identisch ist, wird man keine Differenzen haben. Es gilt

$$(2) \quad y = y' \quad \text{und} \quad z = z'$$

Es gibt nur etwas umzurechnen, wenn man eine  $x'$ -Koordinate von Rot in  $x$  ausdrücken will oder umgekehrt.  $x'$  ist die Distanz des Ortes des Ereignisses, projiziert auf die  $x/x'$ -Gerade, zum roten Ursprung B. Dieser hat selber die Distanz  $v \cdot t$  vom schwarzen Ursprung A. Somit errechnet sich die  $x$ -Koordinate des Ereignisses einfach nach

$$(3) \quad x = x' + v \cdot t = x' + v \cdot t' \quad \text{und damit auch} \quad x' = x - v \cdot t$$

Damit haben wir die sehr einfachen Galilei-Transformationen gefunden. Wir haben dabei entscheidend Gebrauch gemacht von Newtons Vorstellung einer wahren, absoluten Zeit, die für alle gleich abläuft, sowie seiner Vorstellung des wahren, absoluten Raumes, welcher die Berechnung von absolut gültigen Abständen oder Längen gestattet.

Nun soll noch (wie in **A3** versprochen) gezeigt werden, dass sich auf dieser Basis von Galilei und Newton die 'klassische' Addition von Geschwindigkeiten ergibt ('klassisch' ist in diesem Zusammenhang immer gleichbedeutend mit 'nicht relativistisch').

Es bewege sich also C für Rot mit der Geschwindigkeit  $w'$  in  $x'$ -Richtung. Die  $x'$ -Koordinate von C ist dann  $x' = a + w' \cdot t'$ , wo  $a$  irgendeine Konstante bedeutet. Dies ist die Distanz in  $x'$ -Richtung von B zu C. B befindet sich aber zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  für Schwarz am Ort  $v \cdot t$ . Der Ort von C entlang der  $x$ -Achse von Schwarz ist damit  $x = v \cdot t + a + w' \cdot t'$ . Dabei haben wir schon die Absolutheit von Distanzen benutzt. Jetzt benutzen wir noch Newtons absolute Zeit und ersetzen  $t'$  einfach durch  $t$  nach (1). Damit erhalten wir  $x = v \cdot t + a + w' \cdot t = a + (v + w') \cdot t$ . Die gesuchte Geschwindigkeit von C für Schwarz ist also  $w = v + w'$ , die Geschwindigkeiten addieren sich einfach.

Für den Vergleich mit den etwas komplizierteren Lorentz-Transformationen, die wir im nächsten Abschnitt herleiten, stellen wir die Galilei-Transformationen noch in einer Tabelle dar:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - v \cdot t \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x &= x' + v \cdot t' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

Diese Koordinatentransformationen beschreiben also, wie in der klassischen Mechanik die Koordinaten  $(t, x, y, z)$ , die Schwarz einem Ereignis zuschreibt, umgerechnet werden in die Koordinaten  $(t', x', y', z')$ , welche Rot für dasselbe Ereignis festhält - und umgekehrt. Wenn die beiden Koordinatensysteme weniger speziell ausgerichtet wären zueinander, so wären natürlich die Zeilen 2, 3 und 4 in den Kästchen etwas komplizierter. Gar nichts würde sich aber an der ersten Zeile ändern, da zeigt sich ja Newtons absolute Zeit.

Eine etwas kindliche Anregung: Bewegen Sie sich wieder einmal (als Kind haben Sie das sicher schon gemacht) entgegen der offiziellen Fahrtrichtung auf einer Rolltreppe oder auf einem der langen Laufbänder, die man in den Fingerdocks von Flughäfen antrifft. Es macht einfach Spass, und Sie können die Addition (respektive Subtraktion) von Geschwindigkeiten erleben.

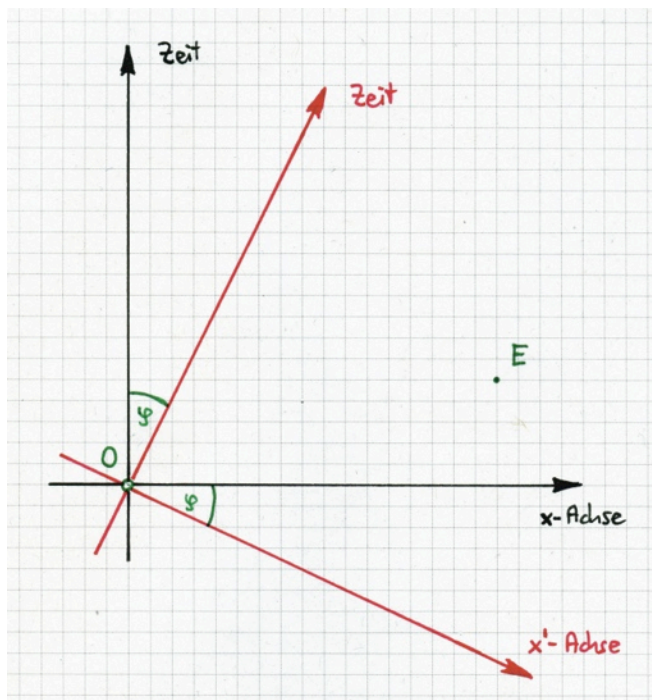
## D2 Herleitung der Lorentztransformationen aus Epsteindiagrammen

Wenn Schwarz und Rot die Messwerte für Ort und Zeit, die sie einem Ereignis zuordnen, miteinander vergleichen wollen, setzt das voraus, dass sie sich schon einmal begegnet sind und beide bei dieser Begegnung in  $x = 0 = x'$  die 'Mutteruhren' auf  $t = 0 = t'$  gestellt und dann die übrigen Uhren innerhalb ihres Systems mit der Mutteruhr synchronisiert haben. Ein Ereignis kommt sozusagen nie allein - es ist immer ein zweiter Kontakt von Rot und Schwarz. Andernfalls sind die Messwerte von Rot und Schwarz beliebig, es gibt gar keine Möglichkeit, sie aufeinander zu beziehen! Diese Vorbemerkung gilt übrigens für alle Raumzeit-Diagramme, nicht nur für diejenigen von Epstein.

Betrachten wir also zwei Koordinatensysteme nach dieser Begegnung in  $O$ , so wie sie im vorangehenden Abschnitt genau beschrieben worden sind. Nun bewege sich irgendeine Rote Uhr an einer bestimmten Stelle von Schwarz vorbei, und sie soll dabei die Koordinaten  $(t', x', y', z')$  dieser Begegnung festhalten. Welche Koordinaten  $(t, x, y, z)$  wird Schwarz dieser Begegnung zuschreiben? Wie können generell solche Ereignis-Koordinaten ineinander umgerechnet werden, wenn man die relativistischen Effekte der Zeitdilatation, der Längenkontraktion und der Desynchronisation berücksichtigt, die wir im Abschnitt **B** aus Einsteins Grundpostulaten hergeleitet haben?

Diese Frage wird durch die Lorentz-Transformationen beantwortet, von denen in **A3** und **A4** bereits die Rede war. Diese Lorentz-Transformationen leiten wir in diesem Abschnitt aus den Epstein-Diagrammen her. Für Skeptiker folgt im nächsten Abschnitt noch eine Herleitung allein aus den drei Grundphänomenen und ihrer quantitativen Beschreibung nach Abschnitt **B**.

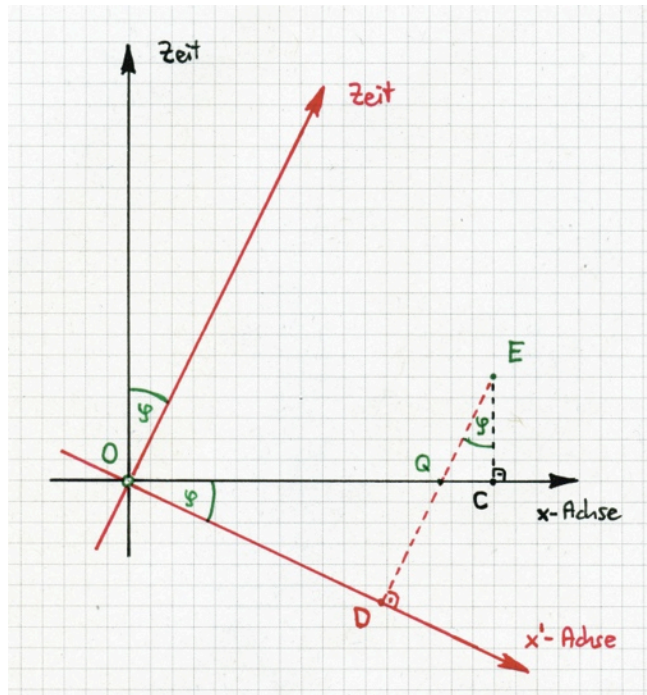
Zuerst halten wir fest, dass weiterhin die bequemen Gleichungen  $y = y'$  und  $z = z'$  gelten. Nach **B3** sind Distanzen senkrecht zur Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme, also senkrecht zu  $x$  und  $x'$ , für Schwarz und Rot gleich gross. Wir brauchen uns daher nur noch um die Zeiten und die Ortskoordinaten in Richtung von  $v$  zu kümmern. Und genau diese Werte werden im Epstein-Diagramm ja schön dargestellt. Wir starten mit einem fast 'leeren' Epstein-Diagramm:



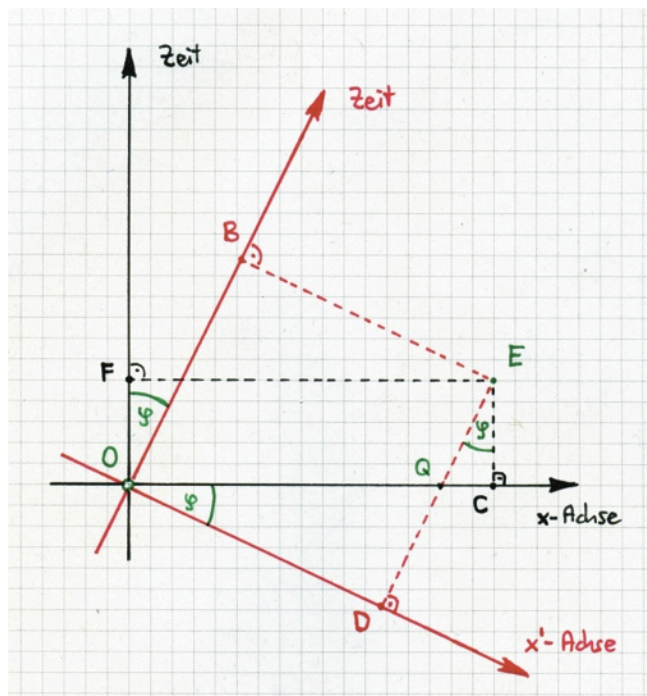
Wir markieren einen beliebigen Punkt  $E$ . Es bestehen keine Zweifel darüber, wo  $E$  für Schwarz und für Rot liegt: Wir müssen nur  $E$  auf die  $x$ - respektive die  $x'$ -Achse projizieren. Wir erhalten die Punkte  $C$  und  $D$  (folgende Figur), und es gilt

$$(1) \quad x = OC \quad \text{und} \quad x' = OD \quad \text{nebst} \quad (2) \quad y = y' \quad \text{und} \quad z = z'$$

Diese Projektionen liefern uns zusätzlich den Hilfspunkt Q, den wir später noch brauchen. Wir haben damit das folgenden Bild vor uns:



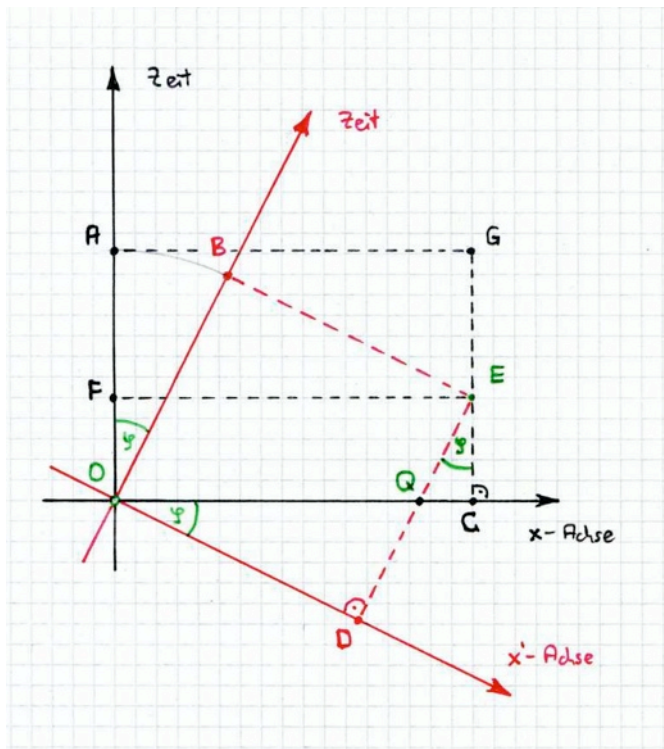
Nun zeichnen wir noch die Projektionen auf die beiden Zeitachsen ein und erhalten die Punkte F und B:



Für Rot sind die Uhren in O und D (oder, etwas später, in B und E) synchronisiert. Schwarz sieht das anders. Was die lokale rote Uhr am Ort D für das Ereignis E anzeigt liest Schwarz einfach auf seiner Zeitachse ab: Es ist

(3)  $t' = OF = CE$

Damit sind beide Effekte (Zeitdilatation und Desynchronisation) berücksichtigt. Jetzt fehlt uns im Diagramm noch die Zeit  $t$  von Schwarz. Mit welcher Uhr misst Schwarz den Vorbeiflug der Roten Uhr am Ort  $x$ ? Natürlich mit derjenigen, die sich am Ort  $x$  befindet, also mit derjenigen, die sich bei der Begegnung der Mutteruhren in  $O$  im Punkt  $C$  befindet. Wo ist aber diese Uhr im Epsteindagramm, wenn sich die Rote Uhr seit dieser Begegnung von  $D$  nach  $E$  bewegt hat? Nach dem Dogma von Epstein bewegen sich zwischen zwei Ereignissen alle immer gleich weit durch die Raumzeit. Die Schwarze Uhr am Ort  $x$  befindet sich dann im Punkt  $G$ , für den gilt  $CG = OA = OB = DE$ :



Zum Ereignis "die Rote Uhr, die sich in ihrem System am Ort  $x'$  befindet, fliegt am Ort  $x$  von Schwarz vorbei" gehören also im Epstein-Diagramm die **beiden** Punkte E und G! Dies ist gerade für diejenigen oft etwas verwirrend, die sich mit anderen Typen von Raumzeit-Diagrammen gut auskennen, bei denen zu einem Ereignis immer ein **einziger** Punkt im Diagramm gehört.

Schwarz schreibt diesem Ereignis somit die folgende Zeitkoordinate zu:

$$(4) \quad t = OA = OB = DE$$

Wir haben immer noch die Aufgabe, zu gegebenen Werten von  $(t, x, y, z)$  die zugehörigen Werte  $(t', x', y', z')$  zu finden und umgekehrt. Wie das mit  $y$  und  $z$  läuft wissen wir bereits. Wir studieren nun, wie man zu  $(t', x')$  die Werte  $(t, x)$  erhält. Die umgekehrten Transformationen kann man daraus als kleine Algebraübung ableiten.

Wir setzen alle raumzeitlichen Strecken als Längen ein und müssen daher die Zeiten mit  $c$  multiplizieren. Es gilt:

$$t \cdot c = OA = OB = DE = DQ + QE = OD \cdot \tan(\varphi) + CE / \cos(\varphi) = x' \cdot \sin(\varphi) / \cos(\varphi) + t' \cdot c / \cos(\varphi)$$

Wenn wir uns noch an die Bedeutung von  $\sin(\varphi)$  und  $\cos(\varphi)$  erinnern, sind wir schon fertig:

$$t \cdot c = x' \cdot (v/c) / \sqrt{1 - v^2/c^2} + t' \cdot c / \sqrt{1 - v^2/c^2} = (t' \cdot c + x' \cdot v/c) / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Wir dividieren noch durch  $c$  und schreiben das Ganze etwas konventioneller:

$$t = \frac{t' + \frac{x'}{c} \cdot \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Die beiden Summanden im Zähler repräsentieren (zusammen mit dem Nenner) schön die beiden Effekte der Zeitdilatation und der Desynchronisation. Für  $x' = 0$  hätten wir nur den ersten Effekt, für  $t' = 0$  zeigt sich vor allem der zweite Effekt.

Ebenso leicht können wir herleiten, wie man den zu  $(t', x')$  gehörigen Wert von  $x$  erhält:

$$x = OC = OQ + QC = OD / \cos(\varphi) + EC \cdot \tan(\varphi) = x' / \cos(\varphi) + t' \cdot c \cdot \sin(\varphi) / \cos(\varphi) \quad , \text{ also}$$

$$x = x' / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + (t' \cdot c \cdot v / c) / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (x' + v \cdot t') / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Hier ist der Unterschied zur entsprechenden Galilei-Transformation kleiner, es zeigt sich sozusagen nur die Längenkontraktion.

Wir stellen die zweimal vier Transformationsgleichungen noch in einer Tabelle zusammen:

$$t' = \frac{t - \frac{x \cdot v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t = \frac{t' + \frac{x' \cdot v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Die hier beschriebenen Transformationen  $(t, x, y, z) \leftrightarrow (t', x', y', z')$  müssen einander gegenseitig rückgängig machen, wenn sie hintereinander ausgeführt werden. Die entsprechende Kontrollrechnung sei dem Leser als Übung empfohlen.

Der Autor dieses Büchleins möchte ja vor allem das hohe Lied auf die Epstein-Diagramme singen. In den USA nennt man solche Typen 'Evangelisten'. Auf diese hier erstmals gezeigte Herleitung der Lorentz-Transformationen aus einem Epstein-Diagramm bin ich als Epstein-Evangelist ganz schön stolz ...

Für Skeptiker oder Unverbesserliche folgt im nächsten Abschnitt eine Herleitung dieser Transformationen ganz ohne Epstein-Diagramme, allein aus den Ergebnissen von Abschnitt **B**.

### D3 Herleitung der Lorentz-Transformationen aus den Grundphänomenen

Es seien also wieder zwei Koordinatensysteme gegeben, wie sie zu Beginn von **D1** genau beschrieben worden sind. Ein Ereignis  $E$  habe für Rot zum Zeitpunkt  $t'$  am Ort  $(x',y',z')$  stattgefunden. Wir wissen schon, dass es für Schwarz am Ort  $(x,y,z)$  stattfindet mit  $y = y'$  und  $z = z'$ . Es sind noch die Werte von  $t$  und  $x$  zu bestimmen, welche für Schwarz zu diesem Ereignis gehören.

Für Schwarz läuft die 'Mutteruhr' von Rot am Ort B (wie jede Uhr von Rot) zu langsam, es gilt

$$t = t(A) = t'(B)/\sqrt{\quad} \quad \text{oder} \quad t \cdot \sqrt{\quad} = t'(B)$$

Eine Uhr am Ort  $x'$  von Rot weist für Schwarz zudem eine Desynchronisation zur Uhr in B auf von

$$\Delta t' = -x' \cdot v/c^2$$

Die rote Uhr in B wird also schon  $t'(B) = t'(x') - \Delta t' = t' + x' \cdot v/c^2$  anzeigen, wenn E stattfindet. Somit erhalten wir für den entsprechenden Uhrenstand von A den Ausdruck

$$t(A) \cdot \sqrt{\quad} = t'(B) = t' + x' \cdot v/c^2$$

Für  $t = t(A)$  selber ergibt sich daraus

$$t = (t' + x' \cdot v/c^2) / \sqrt{\quad}$$

Genau diesen Ausdruck haben wir auch in **D2** für  $t$  hergeleitet.

Nun gilt es noch zu klären, bei welcher  $x$ -Koordinate das Ereignis  $E$  für Schwarz stattfindet. Rot meint, dass die Distanz  $d'$  von A zum Ort  $x'$  der  $x'$ -Koordinate von  $E$  den folgenden Wert habe:

$$d' = x'(E) - x'(A) = x' + v \cdot t'(B) = x' + v \cdot t'(x') = x' + v \cdot t'$$

Dabei haben wir benutzt, dass für Rot die Uhren in B und in  $x'$  synchronisiert sind. Für Rot hat also das Ereignis  $E$  entlang der  $x'$ -Achse, also auch entlang der  $x$ -Achse, den Abstand  $d'$  von A.

Schwarz weiss, dass Rot alle Längen in  $x$ -Richtung verkürzt sieht. Der Abstand des Ereignisses von A muss demnach für Schwarz  $d = d' / \sqrt{\quad}$  betragen, und wir sind fertig:

$$x = d = d' / \sqrt{\quad} = (x' + v \cdot t') / \sqrt{\quad}$$

Genau diesen Ausdruck haben wir auch in **D2** für  $x$  hergeleitet.

Interessant ist, dass in den meisten Lehrbüchern zur SRT für Mittelschulen diese Lorentz-Transformationen nicht hergeleitet werden. Oft werden sie vorausgesetzt oder 'mitgeteilt' und dann werden die Zeitdilatation und die Längenkontraktion daraus abgeleitet. Der umgekehrte Weg von den Grundphänomenen zu diesen doch schon abstrakteren Transformationen kann eben nur beschränkt werden, wenn auch die Desynchronisation quantitativ behandelt worden ist.

Der Grund für die Einführung dieser Lorentz-Transformationen ist aber bei allen Autoren derselbe: Sie liefern eine einfache Herleitung der korrekten Formel für die Addition von Geschwindigkeiten. Dabei hat man es ja grundsätzlich mit *drei* Inertialsystemen zu tun: B bewegt sich mit  $v$  relativ zu A, und C bewegt sich mit  $w'$  relativ zu B. Welche Geschwindigkeit hat dann C für A? Der Winkel  $\varphi$  zwischen den Zeitachsen kann ja sowohl für A und B als auch für B und C z.B.  $60^\circ$  betragen. Fügt man nun die beiden entsprechenden Epstein-Diagramme naiv zu einem einzigen mit 3 Zeitachsen zusammen, so ist der Winkel zwischen den Zeitachsen von A und C bereits  $120^\circ$ ! Auch mir als Epstein-Evangelist blieb es bis vor kurzem nicht erspart, die Formel für die Addition von Geschwindigkeiten in der SRT über die Lorentz-Transformationen abzuleiten.

Alfred Hepp hat mich nun darauf aufmerksam gemacht, dass Epstein in der zweiten Auflage von [10] im Anhang A zeigt, wie man den korrekten Abkippwinkel für die Geschwindigkeit  $w$  aus denjenigen für  $v$  und  $w'$  mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Dank der Skizze in jenem Abschnitt (die zuerst auch verstanden sein will!) konnten wir schliesslich einen recht einfachen Beweis für die Additionsformel (rote Kiste auf der nächsten Seite) finden, der sich nur noch auf die Epstein-Diagramme abstützt, bei dem man also auf die Lorentz-Transformationen vollständig verzichten kann. Ich lege diesen Beweis im Anhang **K7** bei.

## D4 Die Addition von Geschwindigkeiten in der SRT

In **D1** haben wir gezeigt, dass sich in der Mechanik nach Galilei und Newton Geschwindigkeiten einfach addieren: Bewegt sich B mit  $v$  in  $x$ -Richtung von A, und bewegt sich C für B mit  $w'$  in derselben Richtung, so bewegt sich C mit der Geschwindigkeit  $v + w'$  für A. Dass diese einfache Formel in der SRT nicht mehr gelten kann, haben wir schon in **A3** erkannt: Das Licht der stillstehenden Lokomotive muss sich ja gleich schnell nach vorne ausbreiten wie dasjenige der vorwärts-fahrenden, nämlich mit  $c$ .

Für die noch herzuleitende neue Geschwindigkeitsaddition muss also speziell gelten, dass die Summe von  $v$  und  $c$  wieder  $c$  ergibt. Es dürfen in keinem Fall Geschwindigkeiten entstehen, die grösser sind als  $c$ . Fliegt ein Raumschiff mit  $0.7 \cdot c$  an uns vorbei und feuert es dabei eine Rakete ab in Flugrichtung, welche sich relativ zum Raumschiff mit  $0.8 \cdot c$  bewegt, so hätten wir ja nach Newton schon eine Geschwindigkeit der Rakete von  $1.5 \cdot c$  ...

Die Herleitung der korrekten Formel für die Addition von Geschwindigkeiten ist recht harmlos, wenn einem die Lorentz-Transformationen zur Verfügung stehen:

Es bewege sich C mit der Geschwindigkeit  $w'$  in der  $x'$ -Richtung von B, derweil sich B wie immer mit der Relativgeschwindigkeit  $v$  entlang der  $x$ -Richtung von A bewege. Für die  $x'$ -Koordinate von C gilt dann

$$x' = a + w' \cdot t' \quad \text{wobei } a \text{ irgend eine Konstante bedeutet}$$

Wir ersetzen nun einfach sowohl  $x'$  als auch  $t'$  durch Ausdrücke mit  $x$  und  $t$  gemäss den Lorentz-Transformationen:

$$x' = (x - v \cdot t) / \sqrt{\dots} \quad \text{und} \quad t' = (t - x \cdot v / c^2) / \sqrt{\dots}$$

Somit schreibt sich obige Bewegungsgleichung als

$$(x - v \cdot t) / \sqrt{\dots} = a + w' \cdot (t - x \cdot v / c^2) / \sqrt{\dots}$$

Wir multiplizieren beidseits mit der Wurzel und erhalten

$$x - v \cdot t = a \cdot \sqrt{\dots} + w' \cdot (t - x \cdot v / c^2) \quad \text{oder}$$

$$x = a \cdot \sqrt{\dots} + v \cdot t + w' \cdot (t - x \cdot v / c^2) = a \cdot \sqrt{\dots} + v \cdot t + w' \cdot t - w' \cdot x \cdot v / c^2$$

$$\text{Daraus erhalten wir } x + x \cdot w' \cdot v / c^2 = a \cdot \sqrt{\dots} + v \cdot t + w' \cdot t \quad \text{oder}$$

$$x \cdot (1 + w' \cdot v / c^2) = a \cdot \sqrt{\dots} + (v + w') \cdot t$$

Dividieren wir noch durch den linken Klammerausdruck, so erhalten wir

$$x = a \cdot \sqrt{\dots} / (1 + w' \cdot v / c^2) + (v + w') / (1 + w' \cdot v / c^2) \cdot t$$

Da sowohl die Wurzel als auch der Klammerausdruck konstant sind können wir hier ablesen, dass sich C für A mit der konstanten Geschwindigkeit

$$w = (v + w') / (1 + v \cdot w' / c^2)$$

entlang der  $x$ -Achse bewegt!

Wenn wir für die relativistische Addition von Geschwindigkeiten, die parallel sind zur Relativgeschwindigkeit  $v$ , das Symbol  $\oplus$  verwenden, so können wir zusammenfassen:

$$v \oplus w' = \frac{v + w'}{1 + \frac{v \cdot w'}{c \cdot c}}$$

Mit dem Symbol  $+$  bezeichnen wir weiterhin die 'gewöhnliche' Addition. Im Zähler haben wir die bisherige Addition von Geschwindigkeiten, während der Nenner für Korrekturen sorgt, sobald die Werte von  $v/c$  und  $w'/c$  erheblich werden. Für kleine Geschwindigkeiten  $v$  und  $w'$  ist der Nenner praktisch 1.

In der Übungsaufgabe 5 rechnen wir nach, dass diese Formel in allen Fällen vernünftige Werte liefert. So erhält man beispielsweise für das obige Raumschiff mit Rakete eine resultierende Geschwindigkeit von  $0.7 \cdot c \oplus 0.8 \cdot c = (1.5 / 1.56) \cdot c \approx 0.962 \cdot c$

## D5 Quergeschwindigkeiten und Aberration

Wie stellt es sich eigentlich für Schwarz dar, wenn sich im roten System ein Objekt mit einer Geschwindigkeit  $u'$  quer zur Relativgeschwindigkeit  $v$  bewegt? Bis jetzt haben wir nur Bewegungen entlang der x-Achse betrachtet.

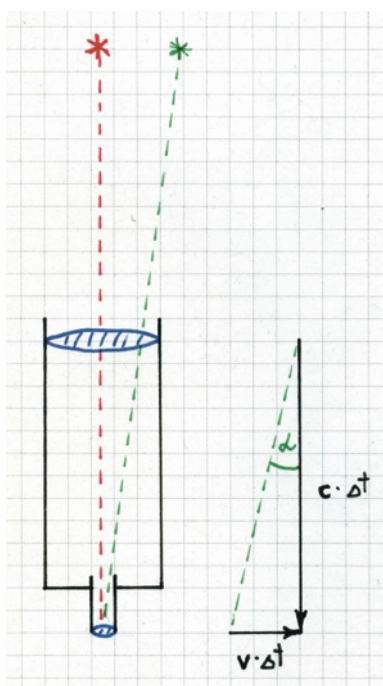
Für die Herleitung der Transformation einer solchen 'Quergeschwindigkeit' brauchen wir die Lorentz-Transformationen nicht. Die Kenntnisse der Grundphänomene genügen dafür völlig. Es sei also  $u'$  eine Geschwindigkeit z.B. in der  $y'$ -Richtung von Rot. Dann gilt

$$u' = \Delta y' / \Delta t' = \Delta y / \Delta t = \Delta y / (\Delta t \cdot \sqrt{\phantom{x}}) = (\Delta y / \Delta t) / \sqrt{\phantom{x}} = u / \sqrt{\phantom{x}}$$

Schwarz misst also die kleinere Quergeschwindigkeit  $u = u' \cdot \sqrt{\phantom{x}}$

Dieses Resultat werden wir in **E1** noch brauchen. Wir verwenden es hier noch zur Herleitung der korrekten Formel für die *Aberration*. Unter der Aberration (lat. aberrare ~ abirren, abweichen) versteht man die Richtungsänderung von Geschwindigkeiten, die sich dadurch ergeben, dass sich der Betrachter ebenfalls bewegt. James Bradley hat 1728 erkannt, dass die winzigen jährlich-periodischen Positionsverschiebungen von Fixsternen als Folge der Bewegung der Erde um die Sonne zu verstehen sind. Der Legende nach wurde ihm das klar, als er bei Windstille und englischem Regen in der Kutsche fuhr und dabei beobachtete, dass der Regen umso schräger zu fallen schien, je schneller die Kutsche fuhr.

Betrachten wir ein Fernrohr, welches in eine Richtung zeige, die senkrecht zur momentanen Fahrtrichtung der Erde auf ihrer Umlaufbahn steht:



In der Zeit, die das Licht eines Sternes braucht, um vom Objektiv bis zum Okular zu gelangen, ist die Erde schon ein Stück auf ihrer Bahn vorangekommen. Wir müssen daher das Teleskop um einen Winkel  $\alpha$  abkippen, damit der Stern in die Mitte des Gesichtsfeldes abgebildet wird. Um diesen Winkel 'irrt also der Lichtstrahl ab' infolge der Bewegung der Erde. Die hergebrachte Formel für diese Aberration ist  $\tan(\alpha) = v/c$ , wo  $v$  die Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Umlaufbahn ist (das sind fast 30 km/s). Der Winkel hat eine Größe von etwa 20 Bogensekunden.

Einstein hat schon 1905 darauf aufmerksam gemacht, dass diese traditionelle Formel nur näherungsweise richtig ist. Quergeschwindigkeiten sind nach obiger Formel zu transformieren, und es ergibt sich dann die korrekte Formel  $\tan(\alpha) = v / (u' \cdot \sqrt{\phantom{x}}) = v / (c \cdot \sqrt{\phantom{x}})$ . Diese Formel erhält man auch, wenn man in der obigen Figur den vom Licht zurückgelegten Weg korrekterweise der Hypotenuse zuordnet statt der Kathete. Für die Quergeschwindigkeit  $u$  des Lichts liefert dann der Pythagoras  $u = c \cdot \sqrt{\phantom{x}}$ , womit man für den Wert von  $\tan(\alpha)$  wieder  $v/u = v / (c \cdot \sqrt{\phantom{x}})$  erhält. Für Licht gilt also exakt die neue Aberrationsformel  $\sin(\alpha) = v/c$ . Diese Korrektur ist astronomisch natürlich unbedeutend, die Werte der Sinusfunktion und der Tangensfunktion unterscheiden sich ja für kleine Winkel kaum.

Wir könnten jetzt ohne weiteres auch den allgemeinen Fall betrachten, wo sich im roten System ein Objekt mit einer beliebigen Geschwindigkeit  $w' + u'$  in eine beliebige Richtung bewegt. Schon in der Originalpublikation von 1905 handelt Einstein diesen Fall ab [12-158f] und gibt für die resultierenden Geschwindigkeiten und Winkel im schwarzen System schöne symmetrische Formeln an. Ebenso wird auch die Aberration ganz allgemein behandelt. Die entsprechenden Rechnungen sollten jetzt für den Leser gut nachvollziehbar sein. Wir werden diese Resultate im folgenden aber nicht brauchen. Einige Hinweise dazu finden sich noch in **K3**.

## D6 Die optische Dopplerformel

Sie kennen alle das Phänomen: Ein Krankenwagen nähert sich schnell mit heulender Sirene. Während er an Ihnen vorbeirast sinkt die Tonhöhe der Sirene und bleibt dann auf tieferem Niveau konstant, wenn er sich von Ihnen entfernt. Auch die andere Situation, wo Sie sich schnell an einer stehenden Lärmquelle vorbeibewegen, ist gut bekannt: Sie fahren mit dem Regionalzug über Land, die Fenster lassen sich noch öffnen, und der Zug fährt an einem unbewachten Bahnübergang mit Alarmglocken vorbei.

Diesen Änderungen der wahrgenommenen Tonhöhen entsprechen messbare Änderungen der Frequenzen der Schallwellen. Christian Doppler hat das theoretisch untersucht und festgestellt, dass man die Fälle "Hörer bewegt sich, Schallquelle ruht" und "Schallquelle bewegt sich, Hörer ruht" unterscheiden muss. 1842 hat er Formeln angegeben, die beschreiben, wie sich die Messwerte der Frequenzen resp. der Wellenlängen ändern. Man nennt heute das Phänomen ihm zu Ehren allgemein den "Dopplereffekt". Wir können leicht verstehen, warum man in der Akustik nicht nur die Relativbewegung von Schallquelle und Hörer betrachten darf: Der Schall breitet sich ja mit einer bestimmten Geschwindigkeit gleichförmig in alle Richtungen *im Medium Luft* aus! Dieses Trägermedium liefert ein ausgezeichnetes Bezugssystem und war natürlich auch das Vorbild für den Äther, in welchem sich das Licht ausbreiten sollte.

Es nähere sich also ein Beobachter B mit der Geschwindigkeit  $v$  einer ruhenden Schallquelle Q. Diese erzeuge einen Ton der Frequenz  $f(Q)$ . Welche Frequenz  $f(B)$  misst dann der Beobachter? Dopplers Antwort auf diese Frage ist die folgende, wobei  $c$  hier die Schallgeschwindigkeit in Luft meint:

$$(1) \quad f(B) = f(Q) \cdot (1 + v/c) \quad \text{Beobachter nähert sich der ruhenden Quelle}$$

Für den Fall, wo sich die Schallquelle mit  $v$  einem im Medium Luft ruhenden Beobachter nähert, gilt die folgende Formel

$$(2) \quad f(B) = f(Q) / (1 - v/c) \quad \text{Quelle nähert sich dem ruhenden Beobachter}$$

Für Werte von  $v/c < 0.1$  unterscheiden sich die beiden Ergebnisse kaum. Der Unterschied wird aber beliebig gross, wenn sich  $v/c$  dem Wert 1 nähert.

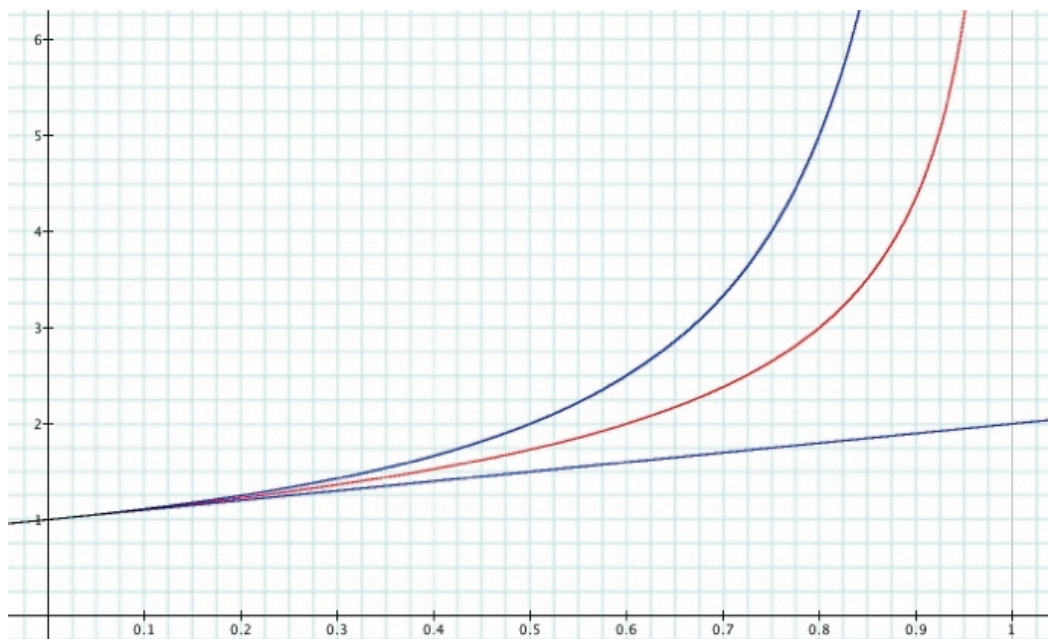
Wechseln wir jetzt vom Schall zu Licht oder allgemeiner zu elektromagnetischen Wellen. Die SRT schliesst aus, dass wir absolut feststellen können, wer ruht und wer sich bewegt. 'Optisch' darf es also nur eine einzige Dopplerformel geben! Diese leiten wir zuerst aus (2) her:

Die Formel (2) bleibt gültig, nur müssen wir zusätzlich berücksichtigen, dass der Oszillator des Senders wegen der Zeitdilatation für den Beobachter B nur noch mit der Frequenz  $f(Q) \cdot \sqrt{1 - v/c}$  schwingt! Damit erhalten wir  $f(B) = f(Q) \cdot \sqrt{1 - v/c} / (1 - v/c)$ . Berücksichtigen wir noch, dass wir schreiben können  $\sqrt{1 - v/c} = \sqrt{(1 + v/c) \cdot (1 - v/c)}$  so können wir noch ein bisschen kürzen und erhalten

$$f(B) = f(Q) \cdot \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} = f(Q) \cdot \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}$$

Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir im Ruhesystem der Quelle argumentieren und von der Formel (1) ausgehen. Der Empfänger B zählt dann mit seiner verlangsamten Uhr mehr, nämlich  $1/\sqrt{1 - v/c}$  mal so viele Schwingungen pro Sekunde wie jemand, dessen Uhren nicht verlangsamt ticken. Damit gilt  $f(B) = f(Q) \cdot (1 + v/c) / \sqrt{1 - v/c}$ , was nach wenigen Umformungen wieder das eingerahmte Resultat liefert. Beide Dopplerformeln liefern also für Licht in der SRT dieselbe Frequenzverschiebung, die Fälle 'ruhende Quelle' und 'ruhender Beobachter' lassen sich tatsächlich nicht mehr unterscheiden.

Stellen wir die drei Funktionen  $y = 1 + x$ ;  $y = 1 / (1 - x)$  und  $y = \sqrt{((1 + x)/(1 - x))}$  graphisch dar und lassen den Wert  $x = v/c$  den Bereich 0 bis 1 überstreichen, so erhalten wir das folgende Bild:



Die untere, lineare Funktion gehört zur Dopplerformel (1), die obere blaue zur Dopplerformel (2). Die mittlere rote Kurve beschreibt den optischen (oder relativistischen) Dopplereffekt gemäss der auf der letzten Seite hergeleiteten Formel. Die Unterschiede treten erst deutlich hervor, wenn  $v/c$  grösser ist als etwa 0.2. Ab einem Verhältnis von  $v/c$  grösser als 0.5 werden die Unterschiede in den Prognosen gross bis dramatisch.

In der Astronomie hat der optische Dopplereffekt wichtige Anwendungen. Gemessen werden dort aber nicht Frequenzen von Spektrallinien, sondern deren Wellenlängen (übliches Formelzeichen  $\lambda$ ). Daher sollten wir das Ergebnis von p.61 noch entsprechend umformen:

Es ist ja allgemein  $\lambda \cdot f = c$  oder  $f = c/\lambda$ . Damit ergibt sich

$$c / \lambda(B) = (c / \lambda(Q)) \cdot \sqrt{((c + v)/(c - v))} \quad \text{und nach der Division durch } c$$

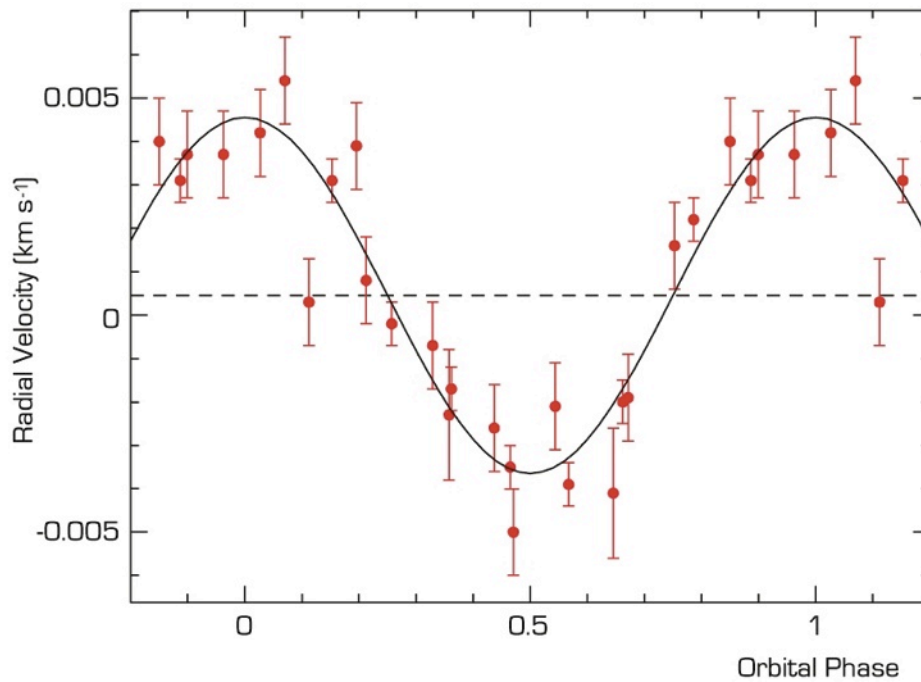
$$\lambda(Q) = \lambda(B) \cdot \sqrt{((c + v)/(c - v))} \quad \text{oder} \quad \lambda(B) = \lambda(Q) \cdot \sqrt{((c - v)/(c + v))}$$

$\lambda(Q)$  ist bekannt und  $\lambda(B)$  wird gemessen. Daraus lässt sich die Geschwindigkeit  $v$  berechnen, mit der sich die Quelle auf uns zu ( $v > 0$ ) oder von uns weg ( $v < 0$ ) bewegt, also die sogenannte Radialgeschwindigkeit. Löst man obige Formel nach  $v$  auf, so erhält man

$$v = c \cdot \frac{\lambda(Q)^2 - \lambda(B)^2}{\lambda(Q)^2 + \lambda(B)^2}$$

Seit wenigen Jahren verfügen die Astronomen über derart präzise Spektrometer, dass sie periodische Schwankungen in der Radialgeschwindigkeit von Sternen im Bereich von wenigen Metern pro Sekunde nachweisen können. Dies ist eine der wichtigsten Methoden für den Nachweis der Existenz von Planeten bei anderen Sternen. Die Graphik auf dieser Seite gibt einen Eindruck von der erreichten Präzision. Die Messwerte der Radialgeschwindigkeit sind mit einer Unsicherheit von etwa  $\pm 1$  m/s eingetragen! Diese Schwankungen der Radialgeschwindigkeit ergeben sich daraus, dass sich Planet *und* Stern um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen.

Weitere Informationen lassen sich problemlos von der gut unterhaltenen Webseite der ESO abrufen. Die Graphik ist offenbar dem ESO press release vom 25. August 2004 entnommen. Suchen Sie dort die Antwort auf die Frage, wie lange eine 'orbitale Phase' in bürgerlicher Zeichnung dauert, mit anderen Worten, wie gross die Umlaufzeit dieses Planeten in Tagen oder Stunden ist.



“Velocity Curve” of mu Arae

ESO PR Photo 25d/04 (25 August 2004)

© European Southern Observatory



<http://www.eso.org/outreach/press-rel/pr-2004/pr-22-04.html>

## D7 Aufgaben und Anregungen

1. Ein Kampfflugzeug fliege mit 1000 m/s und schieße in Flugrichtung ein Geschoss ab mit einer Mündungsgeschwindigkeit von ebenfalls 1000 m/s. Addieren Sie diese Geschwindigkeiten 'klassisch' und 'relativistisch'.
2. Leiten Sie die Lorentztransformationen für  $t'$  und  $x'$  algebraisch her aus denjenigen für  $t$  und  $x$ , die wir in **D2** und ein zweites Mal in **D3** hergeleitet haben. Warum ist das eigentlich unnötig ?
3. Zeigen Sie algebraisch, dass sich die Lorentztransformationen vom ungestrichenen zum gestrichenen System und die umgekehrten gegenseitig rückgängig machen.
4. Leiten Sie die Lorentztransformationen für  $t'$  und  $x'$  aus einem Epstein-Diagramm ab !
5. Prüfen Sie unsere Formel von **D4** zur relativistischen Geschwindigkeitsaddition. Es seien  $v = 0.5 \cdot c$ ,  $w = 0.8 \cdot c$ ,  $u = -0.5 \cdot c$  und  $c$  selber alles parallele Geschwindigkeiten. Bilden Sie  
a)  $v \oplus v$     b)  $v \oplus w$     c)  $v \oplus c$     d)  $c \oplus w$     e)  $c \oplus c$     f)  $c \oplus u$     g)  $u \oplus -c$   
h)  $w \oplus w$
6. Wie schnell nähert sich uns ein Stern, wenn die H $\alpha$ -Linie des angeregten Wasserstoffes nicht bei 656 nm gefunden wird wie im Labor auf der Erde, sondern bei 649 nm ? (Die Linie ist also ein bisschen 'blauverschoben').
7. Wie schnell muss man sich einer Ampel nähern, damit man das rote Licht, das einer Wellenlänge von 620 nm entspricht, grün sieht ( grün  $\sim 520$  nm ) ?
8. Ein Laser sendet Licht von 632 nm Wellenlänge aus. Welche Wellenlänge messen wir, wenn sich dieser Laser am Heck eines UFOs befindet, welches sich mit  $0.5 \cdot c$  von uns entfernt ?
9. Warum zeigt sich die Rotation eines Sternes in einer Verbreiterung seiner Spektrallinien ?
10. Warum verbreitern sich die Spektrallinien, wenn das emittierende Gas eine hohe Temperatur aufweist und unter hohem Druck steht ? (Die Effekte von Aufgabe 8 und 9 äussern sich quantitativ verschieden und lassen sich rechnerisch teilweise trennen, wenn sie überlagert auftreten.)
11. Leiten Sie die optische Dopplerformel aus den akustischen Dopplerformeln für die Wellenlängen her, indem Sie die Längenkontraktion berücksichtigen!
12. Lesen Sie die Seiten 158-160 sowie 165-167 aus Einsteins Originalpublikation in [12]
13. Zu unseren 2 Koordinatensystemen (Schwarz und Rot mit den Punkten A und B) gibt es ein 'mittleres' System C, in welchem sich A gleich schnell nach links bewegt wie B nach rechts. Bestimmen Sie allgemein die Geschwindigkeit dieses mittleren Systems C für A und B. Ohne SRT wäre die Antwort natürlich  $v/2$  und  $-v/2$  ...  
Die Existenz dieses mittleren Systems C liefert übrigens ein schönes Argument dafür, dass die Relativgeschwindigkeiten von B für A und von A für B betragsmässig gleich gross sein müssen: Aus der Sicht von C ist die Situation ja vollkommen symmetrisch !
14. Wie funktionieren wohl die Radar-Geschwindigkeitsmessungen der Verkehrspolizei ? Betrachten Sie das Ganze im System des reflektierenden Autos und nicht in demjenigen des "Blechpolizisten".

II. Prüfungsergebnisse.					
Schulprüfung.			Turnprüfung.		
Jahr 19.....		Kontr.-Nr. ....	Jahr 19.....		Kontr.-Nr. ....
Lern:	Inhalt:	Bekannt:	Vorleistung:	Wettrennen:	Wagen:
Der Sekretär der Prüfungskommission: <b>Kreiskommando Zürich</b>			Der Sekretär der Expertenkommission: <b>Kreiskommando Zürich</b>		
III. Sanitarische Untersuchungen.					
1. Befund der Untersuchungskommission.					
Div.- u. Rekrutierungskreis <i>46</i>		Untersuchungskontrolle Nr. <i>1204</i>			
Körperlänge <i>171,5</i> cm.		Oberarm <i>28</i> cm.			
Brustumfang <i>87</i> cm.		Sehschärfe <i>7/8 c. h. 1.5. 2</i>			
Krankheiten oder Gebrechen:					
<i>Tarices des plantis</i>					
<i>Hyperidrosis ped.</i>					
Verfügung der Untersuchungskommission:					
<i>Diensttauglich A.</i>					
<b>ZÜRICH</b> , den <i>13. März 1901</i>					
Der Sekretär der Untersuchungskommission: <b>Kreiskommando Zürich</b>					
*) Stempel des Divisionsarztes.					

Das Schweizer "Dienstbüchlein" von Albert Einstein. Er wurde wegen Platt- und Schweissfüssen dienstuntauglich erklärt - sicher zu seiner grössten Zufriedenheit.

Einstein floh ja nicht nur aus München, weil er den vorherrschenden Geist am Luitpold-Gymnasium unerträglich fand. Er musste auch befürchten, dort zum Militärdienst eingezogen zu werden - eine Vorstellung, die ihn sicher mit Grauen erfüllte und die ihn bewog, die deutsche Staatsbürgerschaft abzulegen. Alles Militaristische war ihm zutiefst verhasst, und er setzte sich wiederholt für Militärdienstverweigerer und zeitlebens für die Abrüstung und die Stärkung supranationaler Institutionen ein.

Bei dieser Gelegenheit komme ich auf die schlimmste Ausgeburt des Herdenwesens zu reden: auf das mir verhasste Militär! Wenn einer mit Vergnügen in Reih und Glied zu einer Musik marschieren kann, dann verachte ich ihn schon; er hat sein grosses Hirn nur aus Irrtum bekommen, da für ihn das Rückenmark schon völlig genügen würde. Diesen Schandfleck der Zivilisation sollte man so schnell wie möglich zum Verschwinden bringen. [21-11]

Dennoch war er kein naiver Pazifist. Angesichts dessen, was sich anfangs der Dreissiger Jahre in Deutschland vor seiner Berliner Haustüre zusammenbraute, verliess er seine bisherige streng pazifistische Linie und schrieb einem belgischen Militärdienstverweigerer:

Gegen organisierte Macht gibt es nur organisierte Macht; ich sehe kein anderes Mittel, so sehr ich es auch bedaure. [22-116]



The Sombrero Galaxy (VLT ANTU + FORS1)

ESO PR Photo 07a/00 (22 February 2000)

© European Southern Observatory

## E Masse, Impuls und Energie

Nach der Kinematik soll jetzt die Dynamik abgehandelt werden. Im ersten Abschnitt untersuchen wir mit einem symmetrischen Gedankenexperiment, welchen Einfluss eine Relativbewegung auf die Größen 'Masse' und 'Impuls' hat. Dies liefert uns ein neues Argument dafür, dass  $c$  eine Grenzgeschwindigkeit ist. Auch für die Masse und den Impuls wird ein schönes Epstein-Diagramm vorgestellt, welches zu demjenigen für Ort und Zeit korrespondiert. Dann wenden wir uns dem Energiebegriff zu und erkennen, dass Energie träge Masse haben muss. Aber *wiev*iel träge Masse hat eine bestimmte Energiemenge? Eine Rechnung liefert uns die wohl bekannteste Formel der ganzen Physik. Das Ergebnis lässt sich wiederum in einem Epstein-Diagramm zu den Größen Energie und Impuls darstellen.

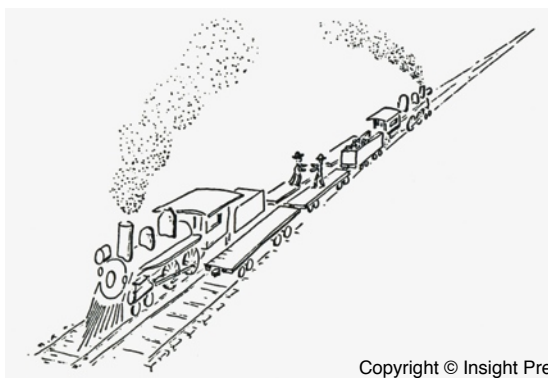
## E1 Der symmetrische Faustschlag

Engländer und Franzosen waren viele Jahre auf Kriegsfuss miteinander. Sie haben sich aber nicht nur politisch und militärisch bekämpft, sondern sie haben auch darüber gestritten, ob die 'Wucht' (lat. 'impetus') eines Geschosses linear oder quadratisch mit der Geschwindigkeit zunähme. Auf der Insel wurde eine geometrisch-vektorielle Betrachtungsweise bevorzugt, und entsprechend hat man die 'Wucht' durch  $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$  beschrieben. Auf dem Kontinent rechnete man lieber mit skalaren Grössen wie  $E = 0.5 \cdot m \cdot v^2$ . Diese Vorlieben zeigen sich heute noch in der Umgangssprache: Muss ein Engländer eine Grösse bestimmen, 'then he will figure it out', während der Franzose 'va calculer ça'.

Heute wissen wir, dass beide Grössen, der Impuls und die kinetische Energie, ihre Bedeutung haben, und es wundert uns daher nicht, dass sowohl die Franzosen als auch die Engländer richtige Resultate bekommen haben. Das Beispiel zeigt aber sehr schön, wie sich auch die physikalischen Begriffe allmählich herauskristallisieren mussten und nicht schon bei der ersten Einführung ihre heutige Präzision besaßen. Und um genau diese Begriffe, nämlich die (träge) Masse, den Impuls und die kinetische Energie, geht es in diesem Kapitel.

Wir müssen zuerst vom Impuls sprechen, dessen Definition  $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$  wir beibehalten! Sobald geklärt ist, wie sich die träge Masse vom einen Bezugssystem ins andere transformiert, ist auch geklärt, was mit dem Impuls geschieht, denn die Transformation der Geschwindigkeiten kennen wir nach D4 und D5 schon. Ohnehin sollte klar sein, dass der Impuls nicht nur in der SRT eine hochrelative Grösse ist: Im Ruhesystem eines Körpers selber ist sein Impuls ja immer null.

Unsere Herleitung folgt der schönen Darstellung in [10-136ff]. Die Darstellung ist deshalb schön, weil sie die Gleichheit zweier Grössen aus der Symmetrie der Anordnung in einem Gedankenexperiment folgert. Die beiden Zwillinge Peter und Danny sollen auf zwei Einstein-Zügen auf einer langen, geraden Trasse aneinander vorbei rasen. Dabei führen sie einen völlig symmetrischen Faustschlag gegeneinander, also quer zur Fahrtrichtung des Zuges, aus:



Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein

Die Symmetrie der Anordnung erlaubt keinem der beiden Zwillinge stärker zuzuschlagen als der andere. Beide Fäuste sind (in Ruhe gemessen!) gleich schwer, beide Fäuste sind im eigenen System gleich schnell ( $\mathbf{u}' = -\mathbf{w}$ ). Jederzeit ist für beide die Summe der Impulse in der y-Richtung, also quer zur Fahrtrichtung, null. Wir betrachten den Schlag mit Peter im schwarzen, ungestrichenen System und sehen die Quergeschwindigkeit  $\mathbf{u}'$  von Danny's Faust nach D5 verzögert. Dass Danny's Faust dennoch einen ebensogrossen Impuls mitführt wie diejenige von Peter können wir uns nur damit erklären, dass Danny die Masse seiner Faust irgendwie erhöht hat. An dieser Stelle erzählt Epstein die Geschichte vom alternden Rausschmeisser in der Bourbon Street, der nicht mehr so schnell zuschlagen kann wie früher und dies dadurch kompensiert, dass er eine Rolle Münzen in die Faust nimmt, um dieser die alte Durchsetzungskraft zu geben ...

Wir rechnen die Angelegenheit nüchtern durch und gehen dabei davon aus, dass die Masse von der Relativgeschwindigkeit abhängt. Mit  $v$  bezeichnen wir (wie immer) die Relativgeschwindigkeit in der  $x$ -Richtung, also der Fahrtrichtung der Züge:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_y \text{ (Danny)} &= -\mathbf{p}_y \text{ (Peter)} && \text{gilt aus Symmetriegründen für Peter und für Danny} \\
 m_{v+u} \cdot \mathbf{u} &= -m_w \cdot \mathbf{w} && \text{für Peter und uns!} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' \cdot \sqrt{\phantom{x}} = -\mathbf{w} \cdot \sqrt{\phantom{x}} \text{ (nach D5) liefert} \\
 m_{v+u} \cdot (-\mathbf{w} \cdot \sqrt{\phantom{x}}) &= -m_w \cdot \mathbf{w} && \text{Wir dividieren durch } -\mathbf{w} \text{ und erhalten} \\
 m_{v+u} \cdot \sqrt{\phantom{x}} &= m_w && v \text{ und } u \text{ stehen dabei senkrecht und sind vektoriell zu addieren!}
 \end{aligned}$$

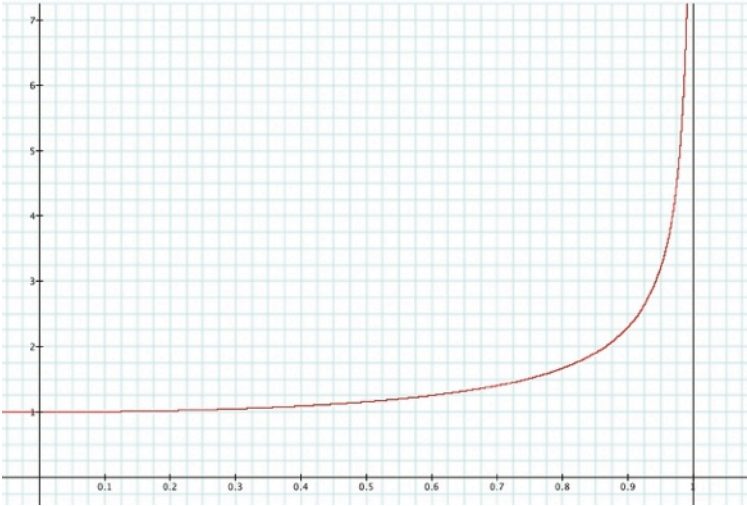
Diese Beziehung gilt für beliebig kleine Quergeschwindigkeiten  $\mathbf{u}' = -\mathbf{w}$ , im Grenzfall gilt sie also auch für  $\mathbf{u}' = -\mathbf{w} = 0$ . Dann wird auch  $\mathbf{u} = 0$ , und  $m_{v+u}$  können wir schreiben als  $m_v$ .  $m_w = m_0$  bedeutet dann die Masse der Faust *in Ruhe*, die sogenannte *Ruhemasse*. Damit haben wir aber die Abhängigkeit der Masse von der Relativgeschwindigkeit  $v$  gefunden: Die träge Masse eines Körpers nimmt mit der Relativgeschwindigkeit zu, und es gilt

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Diese 'dynamische Masse'  $m_v$  ist auch für den relativistischen Impuls einzusetzen:

$$\mathbf{p} = m_v \cdot \mathbf{v} = m_0 \cdot \mathbf{v} / \sqrt{\phantom{x}}$$

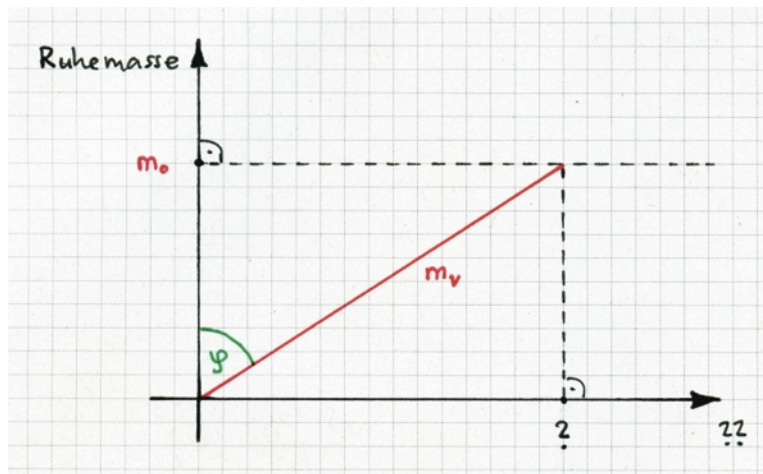
Die Masse eines Teilchens nimmt also mit seiner Geschwindigkeit zu. Ohne die Berücksichtigung dieses relativistischen Effekts würde keiner der modernen Teilchenbeschleuniger je funktionieren! Die Massenzunahme ist nämlich dramatisch, wenn sich die Geschwindigkeit der Teilchen der Lichtgeschwindigkeit nähert: Das Verhältnis  $m_v / m_0$  folgt ja der Funktion  $1 / \sqrt{\phantom{x}}$ , und für  $v \rightarrow c$  geht diese Funktion gegen unendlich:



Wir erhalten damit eine ganz neue Begründung dafür, dass  $c$  eine Grenzgeschwindigkeit ist: Die zu beschleunigende Masse wächst gegen unendlich, wenn sich die Geschwindigkeit  $v$  der Lichtgeschwindigkeit nähert! Der Körper setzt somit einer weiteren Beschleunigung einen immer grösseren Widerstand entgegen. Dies werden wir noch besser verstehen, wenn wir die Fragen um den Begriff der Energie behandelt haben.

## E2 Epsteindiagramme für Masse und Impuls

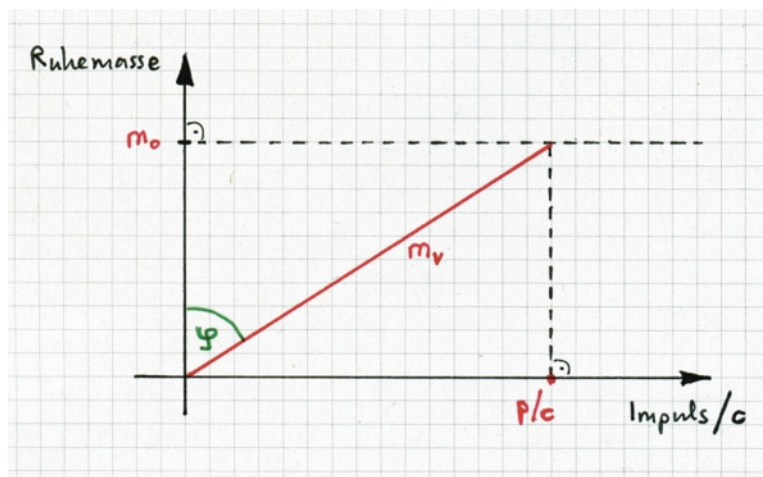
Die 'dynamische Masse'  $m_v$  erhalten wir also, indem wir die 'Ruhemasse'  $m_0$  durch unseren bekannten Wurzelausdruck dividieren, dem ja im Epsteindiagramm der Wert von  $\cos(\varphi)$  entspricht. Daher können wir in einem einfachen Diagramm  $m_0$  und  $m_v$  darstellen:



Kommt nun der Projektion von  $m_v$  auf die horizontale Achse auch eine Bedeutung zu, und wenn ja welche? Diese Projektion erhalten wir ja als  $m_v \cdot \sin(\varphi)$ , und wenn wir uns noch daran erinnern, was dieser Sinuswert im Epsteindiagramm bedeutet, dann erhalten wir sofort

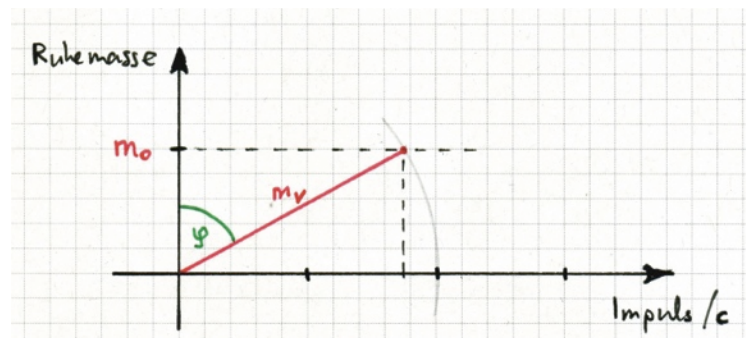
$$\langle ? \rangle = m_v \cdot \sin(\varphi) = m_v \cdot v/c = p/c$$

Damit können wir das Epsteindiagramm zu Masse und Impuls vollständig beschriften:



Je schneller ein Objekt ist, desto grösser wird der Winkel  $\varphi$ , und damit wachsen auch die dynamische Masse und der Impuls dieses Objektes an (wenn die Ruhemasse konstant bleibt).  $\sin(\varphi)$  und  $\cos(\varphi)$  behalten dabei ihre bisherige Bedeutung. Man sieht hier wieder, wie schön die Darstellung würde, wenn  $c$  einfach den einheitenlosen Wert 1 hätte: 1 Raumzeiteinheit pro Raumzeiteinheit. Der Weg von den gängigen technischen Einheiten zu den 'natürlichen' ist aber leicht zu beschreiben; er steht dem Leser offen. Wir gestatten uns immerhin, bei diesem Diagramm vom Masse-Impuls-Diagramm zu sprechen.

Lösen wir noch eine Standardaufgabe mit einem solchen Masse-Impuls-Diagramm: Wie schnell muss sich ein Objekt bewegen, damit sich seine Masse verdoppelt? Setzen wir für  $m_0$  5 Häuschen ein, dann soll also  $m_v$  10 Häuschen betragen:



Ein Zirkelschlag mit Radius 10 Häuschen liefert uns  $m_v$  und  $\varphi$ . Aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$v/c = \sin(\varphi) \approx (8.6 \text{ oder } 8.7 \text{ Häuschen}) / (10 \text{ Häuschen}) \approx 0.86 \text{ oder } 0.87$$

Das Objekt muss sich also mit etwa 87% der Lichtgeschwindigkeit bewegen. Die Rechnung liefert für  $v/c$  den exakten Wert  $\sqrt{3}/2$  mit der numerischen Näherung 0.8660.

Die umgekehrte Fragestellung ("Wie gross ist  $m_v/m_0$  für ein Objekt, welches sich mit 90% von  $c$  bewegt?") lässt sich genauso leicht mit einem Epsteindiagramm zu Masse und Impuls beantworten. Wenn man ganz auf den Taschenrechner verzichten will muss man nur darauf achten, dass  $m_v$  im Nenner einer einfachen Anzahl Häuschen entspricht (am besten 10 oder 20). Wer drei oder mehr Digits ablesen will muss für die Zeichnung schon Millimeterpapier verwenden ...



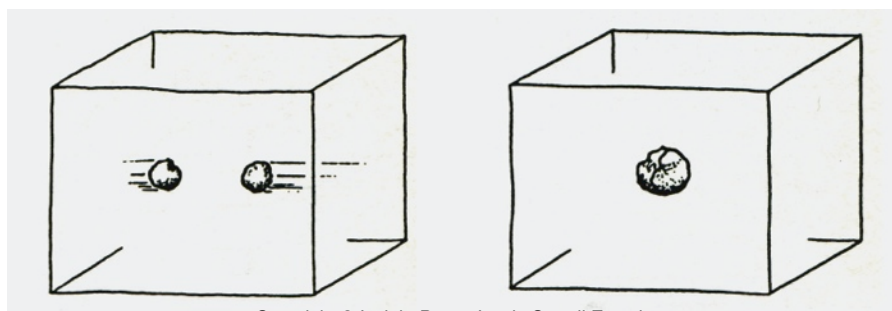
Mein Exemplar des Buches von 'Epstein'.

Das Buch ist offenbar seit einiger Zeit sowohl auf Deutsch als auch auf Englisch nur noch antiquarisch erhältlich, obwohl es von vielen SRT-Autoren zur Lektüre empfohlen wird.

### E3 Masse und Energie - Betrachtungen im abgeschlossenen System

Für die folgenden Überlegungen brauchen wir das Konzept eines 'abgeschlossenen Systems'. Man stelle sich ein beliebig grosses, klar begrenztes Raumgebiet vor (z.B. einen Würfel, eine Schachtel, das Innere einer riesigen Thermosflasche etc.) und postuliere, dass das eingeschlossene Gebiet in keinerlei Austausch mit dem umgebenden Raum stehe: Es sollen weder Materie noch Ladung, weder Energie noch Impuls durch die Wände fließen, es sollen keinerlei Felder von aussen in das Gebiet hineinwirken oder umgekehrt, es sollen also auch keine Kräfte aus der Umgebung hinein oder von innen hinaus wirken. Stellen wir uns also ein solches Gebiet vor, wobei sofort zugegeben sei, dass so etwas gar nicht existiert. Es existieren aber auch keine Einsteinzüge, keine idealen Uhren und keine starren Massstäbe! Das kann uns nicht daran hindern, uns solche Dinge vorzustellen.

Ein solches abgeschlossenes System enthalte einzig zwei Bleiklumpen gleicher Masse, welche mit gleich grossen Geschwindigkeiten aufeinander zurasen. Nach der Kollision bilden sie *einen* grossen ruhenden Bleiklumpen (Zeichnung und Argumentation aus [10-143f]):



Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein

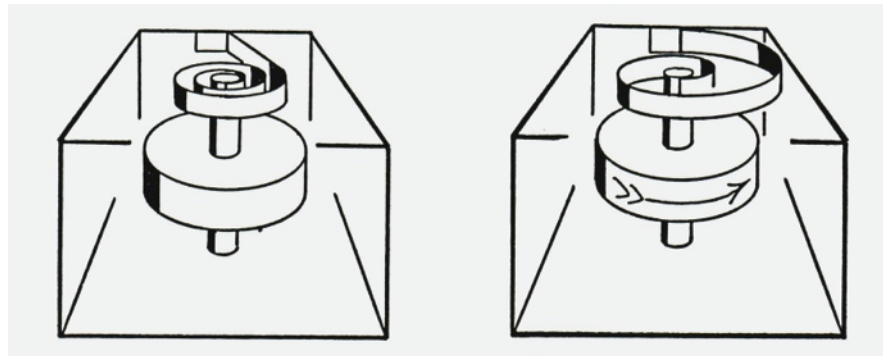
vorher

nachher

Wohin ist die erhöhte Masse verschwunden, welche die beiden Klumpen vor der Kollision aufgrund ihrer Geschwindigkeit besaßen? Sie muss immer noch irgendwo in unserem abgeschlossenen System stecken. Die Schüler finden meist eine gute Antwort: Der grosse ruhende Klumpen ist infolge der Deformation beim Zusammenprall wärmer, die einzelnen Materieteilchen haben eine erhöhte Geschwindigkeit. Die dynamische Masse ist also immer noch vorhanden, nur nicht mehr makroskopisch sichtbar. Gut, aber das heisst doch, dass wir einem Stein auch Masse zuführen, wenn wir ihn - egal wie - erwärmen! Energiezufuhr ist also mit einer Zunahme der Masse verbunden! Setzen wir eine Autobatterie und einen Heizstrahler ein, um einen Stein zu erwärmen, wird der Stein nachher mehr Masse haben als vorher - und die Batterie weniger! Mit dem Fluss von Energie von der Batterie in den Stein ist auch Masse in den Stein hinübergewandert!

Wir können bei unserem Gedankenexperiment die Wärmelehre leicht ausschalten, wenn wir den Vorgang umgekehrt ablaufen lassen: Zwischen zwei Klötzchen sei mithilfe eines Fadens eine Springfeder geklemmt. Der Faden ist zum Zerreißen gespannt und soll nun auch bersten. Die Feder entspannt sich, bleibt wo sie war und die beiden Klötzchen rasen in entgegengesetzte Richtungen davon. Sie haben nun beide eine grosse Geschwindigkeit, ihre Masse hat also zugenommen. Woher kommt diese Masse? Die Feder ist beim Entspannen ja auch eher wärmer geworden, an der Temperatur kann es diesmal nicht liegen. Nachher haben die Klötzchen mehr Masse und zudem noch kinetische Energie - was hatten wir denn vorher? Genau, vorher steckte in der gespannten Feder elastische Energie, und die zusätzliche Masse muss auch daher stammen.

Epstein bringt in [10-144f] ein ähnliches Beispiel:



Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein

vorher

nachher

*Vorher* ist das Schwungrad in Ruhe und die Spiralfeder ist gespannt. *Nachher* haben wir eine entspannte Spiralfeder und ein rotierendes Schwungrad. Das rotierende Schwungrad muss mehr Masse haben als das stillstehende. Diese zusätzliche Masse kann nur aus der Energie in der gespannten Feder kommen. Ja, wir müssen sagen, dass diese zusätzliche Masse des Schwungrades vorher in der gespannten Feder gewesen ist, wenn wir davon ausgehen, dass innerhalb eines abgeschlossenen Systems die gesamte Masse konstant sein soll!

Wir müssen uns also an den Gedanken gewöhnen, dass Energiezufuhr immer auch eine Zunahme der Masse bedeutet. Eine Feder hat also mehr Masse nach dem Spannen als vorher, und ein geladener Kondensator muss mehr Masse haben als ein entladener, obwohl ja nur einige Elektronen von der einen auf die andere Kondensatorplatte verschoben worden sind. Damit stellt sich aber die Frage, *wieviel* zusätzliche Masse ein Joule an zusätzlicher Energie bringt. Der Schottische Bierbrauer und 'Amateurphysiker' James Prescott Joule hat 1843 die Frage beantwortet, wieviele Joule an mechanischer Energie einer Kalorie Wärmeenergie entsprechen. Wir müssen jetzt klären, wieviele Joule Energie einem Kilogramm Masse entsprechen !



Joule genoss zwar zusammen mit seinem Bruder im Alter von 16 bis 18 zwei Jahre lang Privatunterricht beim grossen John Dalton, konnte aber nicht an einer Universität studieren und musste schon früh die Leitung der Familienbrauerei übernehmen. Es ist sehr aufschlussreich zu sehen, wie zögerlich die vornehme Royal Society in London und andere etablierte Herren die schönen Experimente von Joule zur Kenntnis nahmen. Löbliche Ausnahmen sind dabei John Davis, Förderer auch des anderen grossen Autodidakten Faraday, und der uns schon bekannte James Clerk Maxwell.

Lesen Sie den Wikipedia-Beitrag zu Joule oder auch die Darstellung in [www.bhak-bludenz.ac.at/physik/geschichte/physiker/joule.shtml](http://www.bhak-bludenz.ac.at/physik/geschichte/physiker/joule.shtml)

James Prescott Joule (1818-1889)

## E4 Energie hat also Masse. Wieviel Masse hat denn 1 Joule ?

Wenn wir ein Objekt der Ruhemasse  $m_0$  aus der Ruhe beschleunigen, so hat es nachher also nicht nur eine Geschwindigkeit und kinetische Energie, es hat auch eine grössere Masse  $m_v$ . Diesen Vorgang wollen wir nun rechnerisch behandeln, um die Massenzufuhr, die mit einer bestimmten Energiezufuhr verbunden ist, quantitativ bestimmen zu können. Wir wollen dieses wichtige Resultat exakt herleiten und brauchen dazu die Integralrechnung, allerdings nur in einem Umfang, wie sie jeder Schülerin vor dem Abitur oder der Matura zur Verfügung steht. Die Physik dient auch der Mathematik, wenn sie zeigt, wie leistungsfähig die formalen Methoden sind, die in der Mathematik entwickelt werden.

Die kinetische Energie ist gleich der investierten Beschleunigungsarbeit, und diese erhalten wir als Integral über  $F \cdot ds$ , wobei wir über die Beschleunigungsstrecke integrieren müssen:

$$\Delta W = \int F \cdot ds = \Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}} \quad (\text{das letzte Gleichheitszeichen gilt nur für } v_0 = 0)$$

Nach Newton ist die Kraft  $F$  die zeitliche Änderung des Impulses:  $F = dp / dt = d(m \cdot v) / dt$

Dies benützen wir, um das Integral über  $F \cdot ds$  umzuschreiben:

$$F \cdot ds = \frac{d(m \cdot v)}{dt} \cdot ds = \frac{d(m \cdot v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = \frac{d(m \cdot v)}{dv} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dv = \frac{d(m \cdot v)}{dv} \cdot v \cdot dv$$

Statt über die Beschleunigungsstrecke können wir jetzt über die Geschwindigkeitszunahme integrieren:

$$\Delta W = \int_{s_0}^{s_{\text{end}}} F \cdot ds = \int_{v_0}^{v_{\text{end}}} \frac{d(m \cdot v)}{dv} \cdot v \cdot dv = \int_0^{v_{\text{end}}} \frac{d(m \cdot v)}{dv} \cdot v \cdot dv = E_{\text{kin}} \quad (1)$$

Um etwas Vertrauen in diese Umformung herzustellen berechnen wir zuerst, was wir damit im klassischen Fall erhalten. Dort ist die beschleunigte Masse konstant, und die Ableitung von  $m \cdot v$  nach  $v$  liefert einfach  $m$ . Wir erhalten damit nach (1) das folgende Resultat:

$$\Delta W = \int_0^{v_{\text{end}}} \frac{d(m \cdot v)}{dv} \cdot v \cdot dv = \int_0^{v_{\text{end}}} m \cdot v \cdot dv = m \cdot \int_0^{v_{\text{end}}} v \cdot dv = m \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot v^2 \right]_0^{v_{\text{end}}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{end}}^2 = E_{\text{kin}}$$

Wir erhalten für die kinetische Energie den vertrauten Ausdruck, womit hoffentlich das Misstrauen gegenüber dem Jonglieren mit den  $dv$ 's und  $dt$ 's etwas kleiner geworden ist.

Welchen Wert hat der Ausdruck  $d(m \cdot v)/dv$  in der relativistischen Rechnung? Es ist

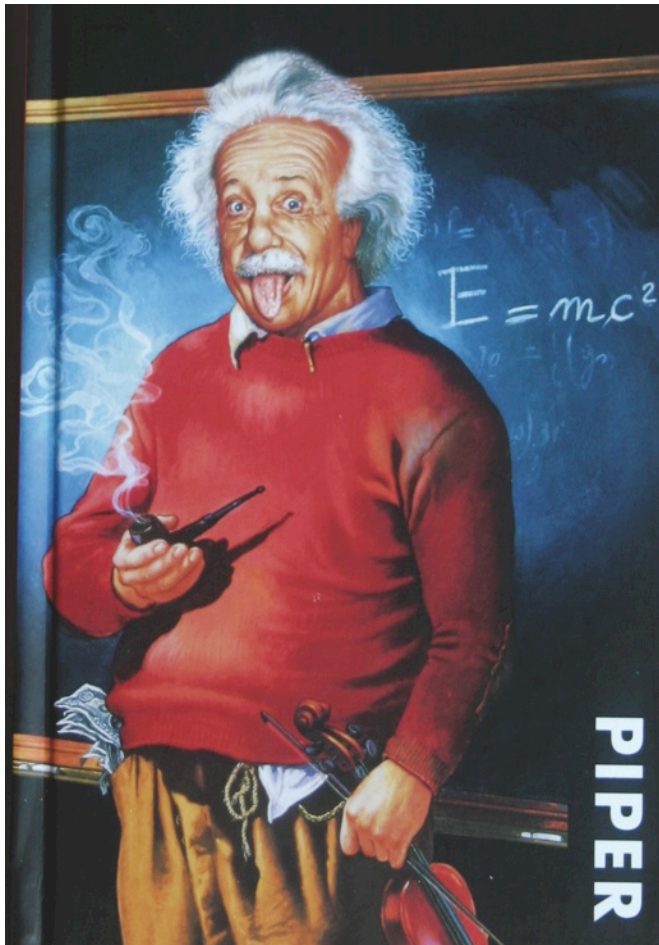
$$\frac{d}{dv}(m \cdot v) = \frac{d}{dv} \left( \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0 \cdot \frac{d}{dv} \left( \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = (\dots \text{ rechne } \dots) = m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$$

Dieser Ausdruck wird gelegentlich auch die 'longitudinale Masse' genannt. Wir betonen aber, dass es nur *einen* Ausdruck für die träge Masse eines Körpers gibt, nämlich  $m_v = m_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , und dieser ist richtungsunabhängig. Man hat von der longitudinalen und transversalen Masse gesprochen bevor geklärt war, dass sich Kräfte und Beschleunigungen verschieden transformieren für die Richtungen parallel und senkrecht zu  $v$ .

Damit können wir ( 1 ) auch im relativistischen Fall durchrechnen:

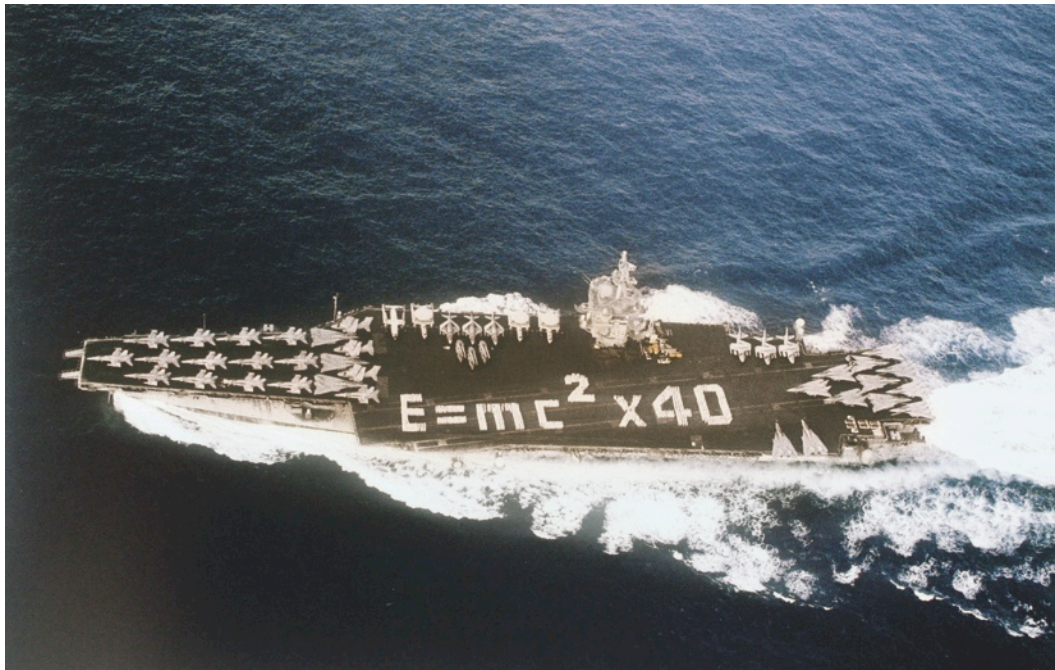
$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_0^{v_{\text{end}}} m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \cdot v \cdot dv = m_0 \cdot \int_0^{v_{\text{end}}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \cdot v \cdot dv = && m_0 \text{ ist ja konstant} \\ &= m_0 \cdot \frac{c^2}{-2} \cdot \int_0^{v_{\text{end}}} \frac{-2 \cdot v}{c^2} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \cdot dv = && \text{die 'innere Ableitung' als Faktor} \\ &= m_0 \cdot \frac{c^2}{-2} \cdot (-2) \cdot \left[ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right]_0^{v_{\text{end}}} = && \text{vereinfachen und Grenzen einsetzen} \\ &= m_0 \cdot c^2 \cdot \left[ \left(1 - \frac{v_{\text{end}}^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right] = && \text{ausmultiplizieren und} \\ &= m_v \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = \Delta m \cdot c^2 && \text{an die Definition von } m_v \text{ auf p.69 denken} \end{aligned}$$

Damit haben wir den gesuchten Zusammenhang zwischen der zugeführten Energie  $\Delta E$  (oder der geleisteten Arbeit  $\Delta W$ ) und der damit bewirkten Massenzunahme  $\Delta m$  gefunden. Die resultierende Formel ist derart einfach, dass sie eine seltsame Popularität erlangt hat.



So ziemlich alle Clichées bedient die Illustration auf dem Umschlag des sonst ganz pfiifigen Büchleins 'Einstein für die Westentasche' von Ernst Peter Fischer zur SRT. Dabei darf natürlich auch die Formel  $E = m \cdot c^2$  nicht fehlen ...

Die US-Navy hat die Formel sogar noch etwas verbessert, um damit das 40-jährige Jubiläum von atomgetriebenen Flugzeugträgern zu feiern. Als 'Pixel' werden dabei Matrosen verwendet:



Zurück zur Physik. Wir wollen in einer roten Kiste festhalten, was Einstein später als das wohl bedeutendste Ergebnis der SRT bezeichnet hat:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

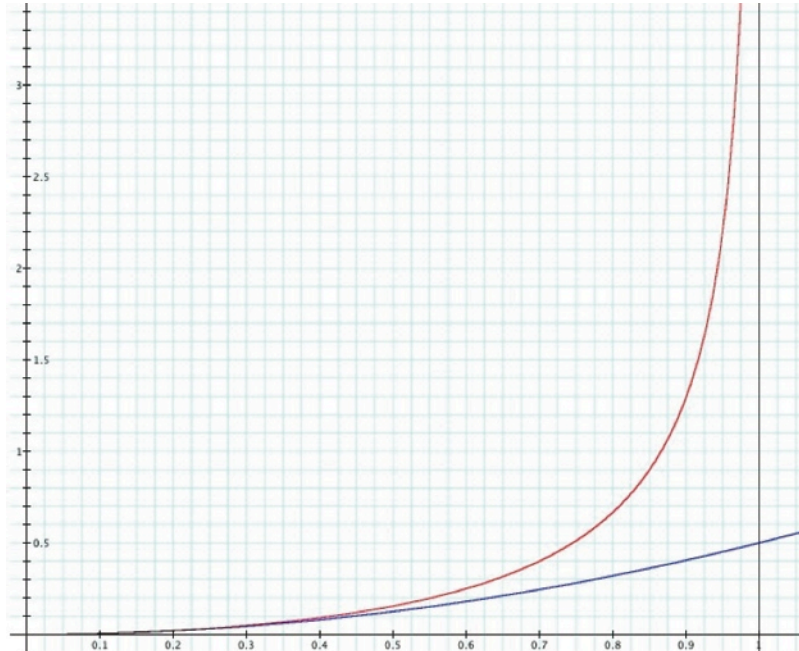
1 Joule zugeführte Energie bewirkt also eine Zunahme der Masse um 1 kg dividiert durch  $c^2$ . Hier sind wir froh, dass wir  $c$  nicht mit 1 normiert haben, da sonst dieser Umrechnungsfaktor zwischen der Energie und der Masse nicht so klar zutage getreten wäre. Mit unserer Herleitung haben wir auch den in der SRT korrekten Ausdruck für die kinetische Energie gefunden:

$$E_{\text{kin}} = (m_v - m_0) \cdot c^2$$

Dass diese Formel für kleine Geschwindigkeiten in den klassischen Ausdruck  $0.5 \cdot m_0 \cdot v^2$  übergeht ist nicht offensichtlich. Wenn Ihnen die Graphik auf der folgenden Seite nicht genügt, dann können Sie das auch so erkennen: Entwickeln Sie den Term  $1/\sqrt{1 - (v/c)^2} = (1 - x^2)^{-1/2}$  für  $x$  in eine Potenzreihe (nehmen Sie eine Formelsammlung oder ein Computer-Algebrasystem zuhilfe) und streichen Sie dann (für kleine Werte von  $x$ ) in dieser Potenzreihe die Glieder vierter und höherer Ordnung.

Die Beziehung  $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$  hat Einstein übrigens erst kurz nach dem Erscheinen von [23] gefunden und im Herbst des Jahres 1905 quasi als Nachtrag mitgeteilt [24]. Schon 1901 hat Walter Kaufmann (1871-1947) aufgrund von Messungen an schnellen Elektronen eine Abhängigkeit der 'transversalen Masse' von der Geschwindigkeit erwogen. Wegen der fundamentalen Bedeutung der Formel ist sie experimentell immer wieder geprüft worden. So haben 2005 zwei Forschergruppen in Kanada und den USA die Genauigkeit offenbar auf 1 zu 1 Million steigern können [nature 438, 1096-1097]. Und, vor allem: In keinem der vielen Experimente konnte je eine Abweichung von Einsteins Formel nachgewiesen werden! Theorien können ja durch Experimente nicht bestätigt, wohl aber falsifiziert werden.

Wir wollen noch die kinetische Energie nach der klassischen und der relativistischen Rechnung in einem Diagramm vergleichen. Wir zeichnen dafür  $E_{\text{kin}} / E_0$  auf für Werte  $x = v/c$  von 0 bis 1. Dem klassischen Verhalten entspricht die blaue Kurve mit  $y = 0.5 \cdot x^2$ , während das relativistische durch die rote Kurve mit  $y = 1/\sqrt{1 - x^2} - 1$  wiedergegeben wird:



Man sieht schön, dass die Kurven erst für grössere Geschwindigkeiten voneinander abweichen. Elektronen können aber schon durch technisch gut handhabbare Beschleunigungsspannungen auf  $0.8 \cdot c$  beschleunigt werden und zeigen dann deutliche Abweichungen vom klassischen Verhalten (Experimente von Kaufmann, Aufgabe 4).

Sehr schnelle Teilchen ( $v \approx c$ ) ermöglichen auch eine sehr schnelle Herleitung der Beziehung zwischen der Massenzunahme und der zugeführten Energie. Ein Teilchen habe bereits eine Geschwindigkeit, die sich nur noch um Bruchteile von Promillen von  $c$  unterscheidet. Die ganze zugeführte Energie kommt praktisch nur noch der Erhöhung der Masse zugute. Es gilt dann in guter Näherung  $p = m_v \cdot v \approx m_v \cdot c$  und daher  $dp/dv = c \cdot dm/dv$ . Wir erhalten nun sofort

$$dW = (dp/dv) \cdot v \cdot dv = c \cdot (dm/dv) \cdot c \cdot dv = c^2 \cdot dm$$

und sind schon fertig: Die Massenzunahme ist der Energiezufuhr proportional, und der Proportionalitätsfaktor ist dabei das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit! Diese Rechnung ist eigentlich das Pendant zur klassischen Rechnung, die wir am Anfang des Abschnittes gemacht haben und bei der wir zusätzlich angenommen haben, dass  $m$  konstant sei.

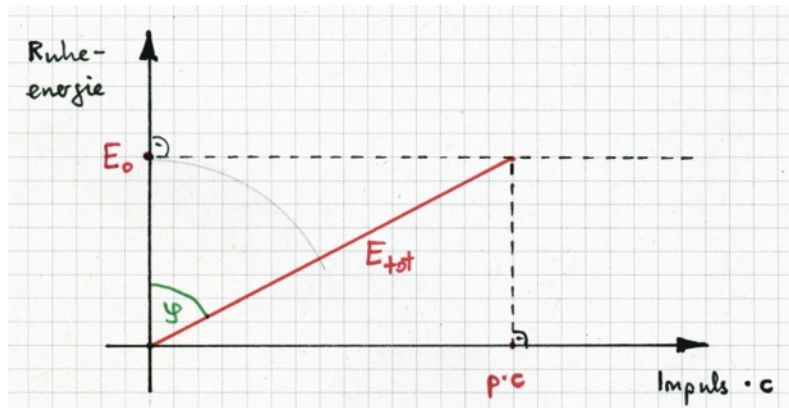
Das Produkt einer Masse mit dem Quadrat einer Geschwindigkeit stellt (wie man schon lange weiss) also eine Energie dar. Wir haben hergeleitet

$$\Delta W = m_v \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = \Delta m \cdot c^2 = E_{\text{kin}} = m_0 \cdot c^2 \cdot (1/\sqrt{1 - x^2} - 1)$$

Der Ausdruck  $m_0 \cdot c^2$  gibt die Energiemenge an, welche der Ruhemasse entspricht, welche das Objekt schon vor der Beschleunigung besessen hat. Man nennt  $m_0 \cdot c^2$  daher die *Ruheenergie* des Objekts und schreibt dafür  $E_0$ . Der Ausdruck  $m_v \cdot c^2$  steht dann für die Summe der Ruheenergie und der kinetischen Energie, also für die *Gesamtenergie* des Objekts. Diese werden wir mit  $E_{\text{tot}}$  bezeichnen.

## E5 Epsteindiagramme für Energie und Impuls

Wieso soll ich es mir nicht einmal leicht machen? Nehmen Sie das Epsteindiagramm zu Masse und Impuls von E2 und multiplizieren Sie darin alle auftretenden Strecken mit  $c^2$  ! Wir brauchen nur noch genau hinzusehen und stellen fest, dass wir ein Epsteindiagramm zu den Größen Energie und Impuls vor uns haben: Die Ruhemasse  $m_0$  wird zu  $m_0 \cdot c^2$ , also zur Ruheenergie  $E_0$ , die dynamische Masse  $m_v$  wird zu  $m_v \cdot c^2$ , also zur Gesamtenergie  $E_{tot}$ , und statt  $p/c$  haben wir auf der horizontalen Achse eben  $p \cdot c$  :



Dabei behalten  $\varphi$ ,  $\sin(\varphi)$  und  $\cos(\varphi)$  natürlich ihre bisherige Bedeutung. Die entsprechenden Beziehungen können aber in ihrem neuen Zusammenhang geprüft werden:

$$E_{tot} \cdot \sin(\varphi) = m_v \cdot c^2 \cdot v/c = m_v \cdot c \cdot v = m_v \cdot v \cdot c = p \cdot c$$

$$E_{tot} \cdot \cos(\varphi) = m_v \cdot c^2 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = (m_v \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}) \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 = E_0$$

Müheless erhalten wir auch die wichtige Beziehung zwischen den Energien und dem Impuls. Wir brauchen nur den Satz des Pythagoras anzuwenden:

$$(E_{tot})^2 = (E_0)^2 + (p \cdot c)^2 \quad (2)$$

Auch die kinetische Energie kann leicht sichtbar gemacht werden: Man schlägt einen Kreis um den Ursprung mit Radius  $E_0$  und sieht dann  $E_{kin}$  als Differenz von  $E_{tot} - E_0$ .

Wir sollten an dieser Stelle nochmals darauf hinweisen, dass kein Teilchen mit nicht verschwindender Ruhemasse jemals die Lichtgeschwindigkeit ganz erreichen kann. Man müsste ja für seine Beschleunigung unendlich viel Energie aufwenden! Lassen Sie den Winkel  $\varphi$  im obigen Diagramm vor dem geistigen Auge immer mehr gegen  $90^\circ$  wachsen und beobachten Sie dabei, wie die Gesamtenergie des Teilchens anwächst!

Umgekehrt können wir auch folgern, dass Photonen keine Ruhemasse haben dürfen, da sie ja immer und für alle die Geschwindigkeit  $c$  haben. Aus  $E_0 = 0$  folgt für sie aus (2) die spezielle Beziehung  $E_{tot} = p \cdot c$ . Diese Lichtteilchen führen also nicht nur Energie, sondern auch einen wohldefinierten Impuls  $p = E / c$  mit sich. Dieser Impuls der Lichtteilchen erzeugt einen bestimmten Druck auf eine bestrahlte Fläche. Dazu gibt es eine besonders schöne Illustration: Den Astronomen ist schon lange bekannt, dass das Sonnenlicht einen Strahlungsdruck auf den Schweif eines Kometen ausübt. Der Kometenschweif zeigt nämlich immer von der Sonne weg. Wenn sich der Komet wieder von der Sonne entfernt, zieht er also seinen Schweif nicht hinterher, sondern dieser fliegt ihm voraus! Der Staubschweif, der aus schwereren Teilchen besteht, zeigt sich dabei etwas träger als der Gas- oder Ionenschweif, der hauptsächlich aus Wassermolekülen besteht. Das Bild auf der nächsten Seite zeigt die beiden Komponenten des Schweifes wunderschön. Es handelt sich dabei um den Kometen Hale-Bopp, aufgenommen im März 1997.



<http://astronomy.swin.edu.au/sao/imagegallery/Hale-Bopp.jpg>

Man darf nun nicht meinen, dass die Gesamtenergie eines Objektes *immer* grösser wird, wenn es schneller wird. Wesentlich ist, ob ihm Energie zugeführt wird oder nicht. So nimmt bei einer Strassenbahn, die ihre Energie aus der Fahrleitung bezieht, die Gesamtenergie und die Masse mit der Geschwindigkeit tatsächlich zu wie im nebenstehenden Epsteindiagramm. Anders sieht es aber aus bei einem Elektromobil, also einem batteriebetriebenen Elektrofahrzeug. Es bezieht die Energie für die Beschleunigung 'von seiner Substanz', wandelt also nur elektro-chemische Energie in kinetische um. Dabei nimmt weder seine Gesamtenergie noch seine Masse zu. Zeichnen Sie das entsprechende Epsteindiagramm!

Die Algebra liefert allerhand weitere Beziehungen zwischen den Energien, dem Impuls und der Relativgeschwindigkeit. Die wichtigsten davon wollen wir hier festhalten:

$$\cos(\varphi) = \frac{v}{c} = \frac{m_0}{m_v} = \frac{m_0 \cdot c^2}{m_v \cdot c^2} = \frac{E_0}{E_{\text{tot}}}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - m_0^2 / m_v^2} = \sqrt{1 - E_0^2 / E_{\text{tot}}^2} = \sqrt{1 - 1 / (1 + E_{\text{kin}}^2 / E_{\text{tot}}^2)}$$

$$m_0^2 = m_v^2 - p^2 / c^2$$

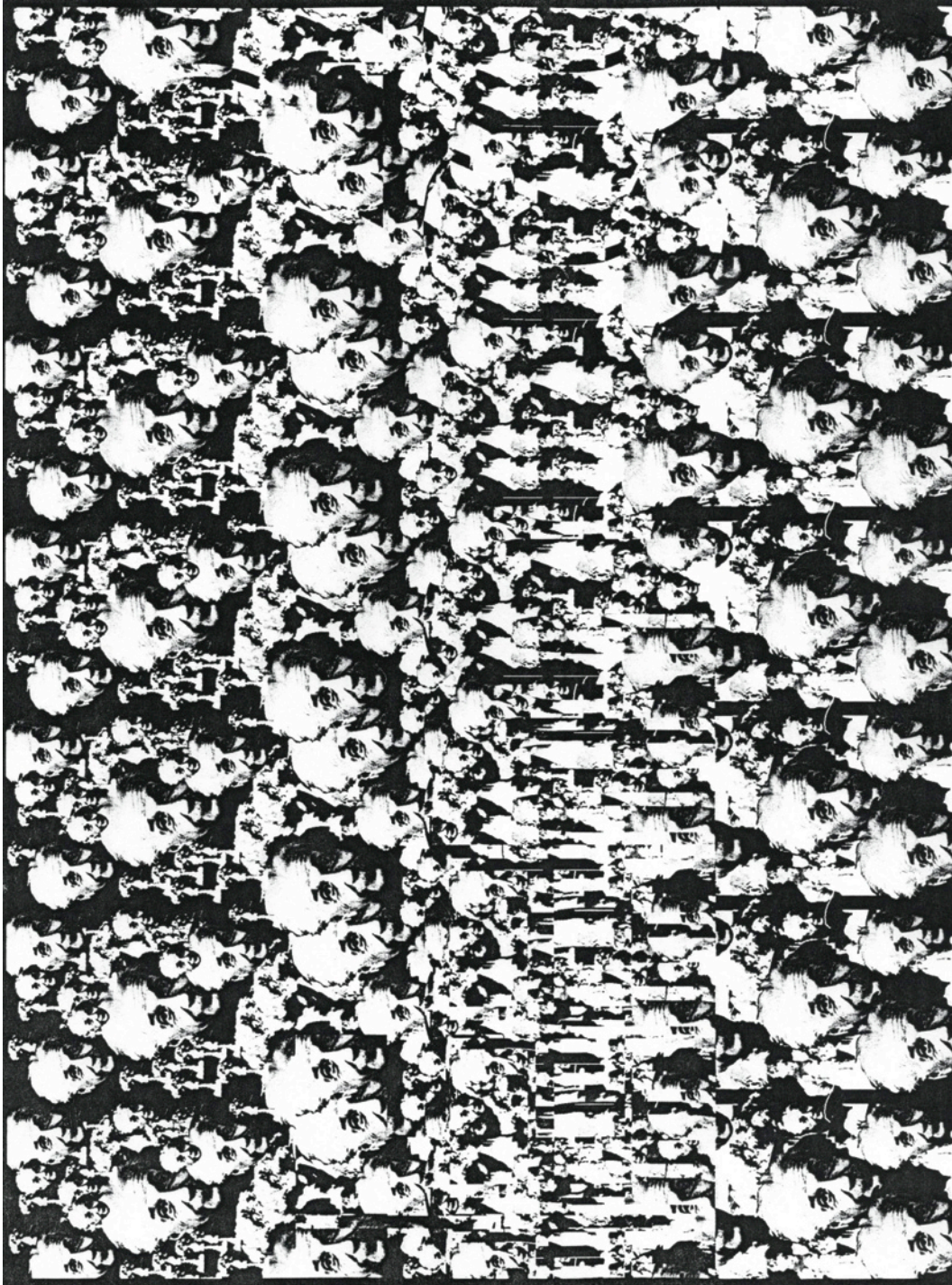
$$E_0^2 = E_{\text{tot}}^2 - p^2 \cdot c^2$$

$$p^2 = (m_v^2 - m_0^2) \cdot c^2$$

Wegen ihrer grossen Bedeutung ist die Beziehung  $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$  immer wieder auf neuen Wegen hergeleitet worden. Die wohl schönste und einfachste Herleitung hat Einstein selber 1946 (!) in seinem sehr lesenswerten Buch "Aus meinen späten Jahren" [20-121ff] präsentiert. Sie ist nicht ganz exakt (verwendet also einige Näherungen), braucht aber fast keine Mathematik und macht ganz sparsame Voraussetzungen. Die Lektüre sei dem Leser warm empfohlen.

## E6 Aufgaben und Anregungen

1. Wieviel Masse strahlt ein Radiosender täglich ab, wenn er rund um die Uhr mit einer Leistung von 12 kW sendet ?
2. Welche Massenzufuhr erfährt die Erde täglich durch die Sonneneinstrahlung ? Rechnen Sie mit einer 'Solarkonstanten' von  $1400 \text{ W/m}^2$ . Mit welcher Kraft drückt diese Strahlung auf den absorbierenden Erdquerschnitt ( -> p. 78 unten zum Impuls von Strahlungsenergie ) ?
3. 2005 betrug der Gesamtenergieverbrauch der Schweiz gemäss Bundesamt 890'440 TJ. Wieviele  $\text{m}^3$  Granit haben eine dieser Energiemenge äquivalente Masse ?
4. Bestimmen Sie allgemein  $v/c$  für Elektronen, welche eine bestimmte Beschleunigungsspannung  $U$  durchlaufen haben a) nach klassischer und b) nach relativistischer Rechnung
5. HighCap-Kondensatoren bieten seit wenigen Jahren Kapazitäten von einigen Farad. Allerdings dürfen sie nicht an hohe Spannungen gelegt werden. Ein solcher Kondensator von 4.7 Farad habe ungeladen eine Masse von 4 Gramm. Welche Masse hat er, nachdem er an eine Spannung von 12 Volt gelegt worden ist ?
6. Die Chemiker gehen bei ihren Reaktionen immer von der Erhaltung der Masse aus. Könnte aber nicht bei heftigen Reaktionen soviel Energie freigesetzt werden, dass sich ein kleines Massendefizit bemerkbar macht ? Prüfen Sie das am Beispiel der Knallgasreaktion: Werden aus 2 Mol  $\text{H}_2$  und 1 Mol  $\text{O}_2$  2 Mol  $\text{H}_2\text{O}$  hergestellt, so wird dabei eine Energie von 2·240 kJ freigesetzt. Wieviele % der ursprünglichen Masse 'verschwinden' also ?
7. Bei welcher Geschwindigkeit (in % von  $c$ ) ergibt sich  $m_v = 3 \cdot m_0$  ? Lösen Sie die Aufgabe sowohl mit einer Zeichnung als auch mit einer Rechnung !
8. Das Verhältnis  $m_v / m_0$  kann als Mass für die in einem Teilchenbeschleuniger erreichte Geschwindigkeit genommen werden. Ein anderes Mass ist die noch bestehende Differenz zur Lichtgeschwindigkeit, ein weiteres die dem Teilchen zugeführte Energiemenge. Im Super-Protonen-Synchrotron im CERN kann man seit 1976 Protonen derart beschleunigen, dass  $m_v$  427 mal so gross ist wie  $m_0$ . Berechnen Sie  $v/c$ , die Differenzgeschwindigkeit  $c - v$  sowie die erforderliche Beschleunigungsenergie in GeV (vgl. dazu auch [17-201ff]!).
9. Fortsetzung von Aufgabe 8: Ein kreisförmiger Tunnel, in welchem Protonen herumrasen, hat im CERN einen Radius von 1200 Meter. Wie stark müsste das Magnetfeld sein, um die Protonen mithilfe der Lorentzkraft auf der Kreisbahn zu halten, wenn sie nur die Ruhemasse  $m_0$  hätten ? Welche Masse  $m_v$  haben sie, wenn dafür effektiv ein Magnetfeld von 1.11 Tesla erforderlich ist ?
10. Die Energie, die im elektrischen Feld einer geladenen Kugel steckt, beträgt  $q^2 / (2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r)$ . Welcher Radius ergibt sich daraus fürs Elektron, wenn man annimmt, dass seine Ruhemasse nichts anderes ist als die Masse, welche in der Energie seines elektrischen Feldes steckt ? (Es gibt keine Experimente, welche eine räumliche Ausdehnung des Elektrons nachweisen)
11. Wir wissen aus E1, dass Impulse quer zu  $v$  invariant sind:  $p_y' = p_y$ . Definiert man die Kraft weiterhin als zeitliche Änderung des Impulses ( $F = dp/dt$ ), so lässt sich leicht zeigen, wie sich Kräfte transformieren, die senkrecht stehen auf  $v$ . Daraus kann man herleiten, dass der Druck eine invariante Grösse ist. Die allgemeine Gasgleichung  $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$  liefert dann die Transformation der Temperatur, und diese diejenige der Energie ...



Ein Autostereogramm: Betrachten Sie einen Punkt etwa 40 cm hinter dem Blatt, wobei die Augen aber auf die Distanz zum Blatt selber adaptiert werden sollen. Einigen gelingt das nie, bei anderen stellt sich das 3d-Bild fast sofort ein, wenn 'sie sich in das Blatt versenken'. Mit etwas Anstrengung kriegen es aber die meisten früher oder später hin; und hat man es einmal geschafft, so geht es das nächste Mal viel schneller. Übrigens: Es funktioniert *viel* besser im Querformat ...



Spiral Galaxy NGC 1097  
(VLT MELIPAL + VIMOS)

## F Die Erhaltungssätze

Im ersten Abschnitt wird der Kern der ganzen klassischen Physik auf einer einzigen Seite dargestellt. Im zweiten Abschnitt schauen wir dann, welche Änderungen die SRT an diesem Kern vornimmt. Dann folgen Beispiele für die zentralen Erhaltungssätze der Physik: Wir betrachten einige wichtige Prozesse, bei denen Masse in Energie umgewandelt wird, und machen grundsätzliche Überlegungen zu relativistischen Stossvorgängen. Schliesslich sprechen wir noch von Vorgängen, bei denen Teilchen aus Energie erzeugt werden oder bei denen Teilchen und Antiteilchen in reine Energie 'zerstrahlen'.

Für die Transformation der elektrischen und magnetischen Felder verweisen wir schliesslich auf bestimmte Darstellungen von anderen Autoren. Diese Transformationen waren ja das eigentliche Ziel der ersten Arbeit von Einstein zur speziellen Relativitätstheorie, denn erst sie beheben die "Asymmetrien, welche den Phänomenen nicht anzuhafte scheinen".

## F1 Die ganze Physik

Die vier wichtigsten Grössen der ganzen Physik sind

1. die elektrische Ladung, ein Skalar mit dem Formelzeichen  $q$  und der Maßeinheit Coulomb
2. die Masse, ein Skalar mit dem Formelzeichen  $m$  und der Maßeinheit Kilogramm
3. der Impuls, ein Vektor mit dem Formelzeichen  $\mathbf{p}$  und der Maßeinheit  $\text{kg}\cdot\text{m/s}$  oder  $\text{N}\cdot\text{s}$  (!)
4. die Energie, ein Skalar mit dem Formelzeichen  $E$  und der Maßeinheit Joule.

Warum gerade diese vier und keine anderen? Die Antwort auf diese Frage ist das zentrale Credo der klassischen Physik: In einem abgeschlossenen System bleibt von diesen vier Größen die Gesamtmenge konstant, was sich auch immer abspielen mag! Man kann elektrische Ladungen weder erzeugen noch vernichten, man kann sie trennen oder verschieben, aber die Summe aller positiven und negativen Ladungen bleibt insgesamt immer konstant. Und die Gesamtmasse des Schrotthaufens nach einer Massenkollision ist gleich gross wie die Summe der Massen der einzelnen beteiligten Autos vor der Karambolage. Aber der Impuls, wird der nicht vernichtet, wenn ich unsanft auf dem Boden lande? Nein, nicht wenn man *alle* beteiligten Stosspartner einbezieht (alle diese **Erhaltungssätze** gelten nur in abgeschlossenen Systemen!). Die Erhaltung der gesamten Energie schliesslich ist eine Erkenntnis der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden, es lassen sich nur verschiedene Erscheinungsformen derselben ineinander umwandeln.

Neben diesem Kern stehen auf einem Sockel die Bewegungsgesetze von Newton:

1. Das Gesetz 'actio = reactio' : Es gibt keine einzelnen Kräfte, sondern nur Wechselwirkungen
2. Das Trägheitsgesetz: Falls keine Kräfte wirken gilt  $\mathbf{v} = \text{konstant}$  (inbegriffen der Fall  $\mathbf{v} = 0$ )
3. Die Beschreibung der Wirkung von Kräften durch  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$

Das erste Gesetz ist (zusammen mit dem dritten) äquivalent zur Erhaltung des Gesamtimpulses. Wir wollen es trotzdem nicht weglassen, weil es eine sehr tiefe Einsicht mit lateinischer Prägnanz auf den Punkt bringt. Das zweite Gesetz ist ein Spezialfall des dritten und bleibt nur stehen, um Aristoteles ein bisschen zu ärgern. Das dritte Gesetz ist aber unverzichtbar: Es sagt uns, wie man die zukünftige Bewegung eines Teilchens berechnen kann, wenn man die wirkenden Kräfte sowie den momentanen Bewegungszustand kennt.

Damit gilt es zu klären, welche Kräfte es denn gibt. Die Antwort ist wiederum leicht überschaubar. Es gibt nur drei Kräfte, die von drei verschiedenen *Kraftfeldern* herrühren:

1. Die Newton'sche Gravitationskraft, welche auf Massen wirkt:  $\mathbf{F}_N = m\cdot\mathbf{g}$
2. Die Coulombkraft, welche auf elektrische Ladungen wirkt:  $\mathbf{F}_C = q\cdot\mathbf{E}$
3. Die Lorentzkraft, welche auf schnelle elektrische Ladungen wirkt:  $\mathbf{F}_L = q\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

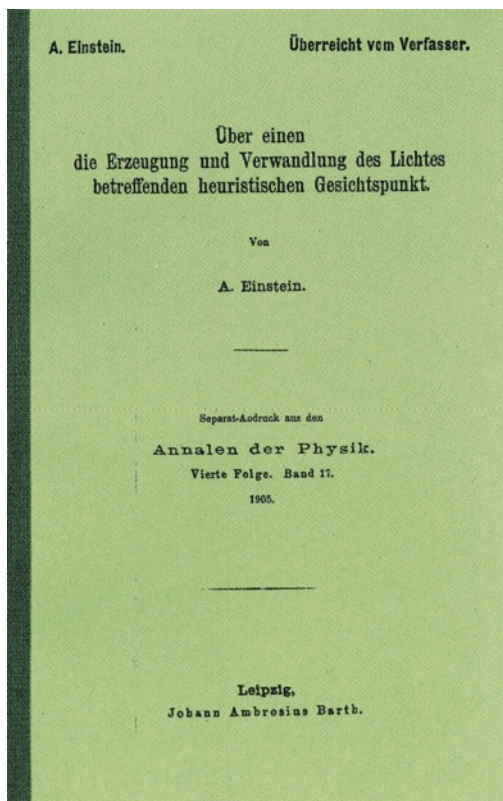
Woher stammen aber die entsprechenden Felder, also das Gravitationsfeld  $\mathbf{g}$ , das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  ? Für das Gravitationsfeld hat Newton schon die Antwort gegeben: Es wirkt nicht nur auf Massen, sondern es wird auch von diesen erzeugt. Die genaue Beschreibung gibt sein Gravitationsgesetz. Elektrische und magnetische Felder werden hingegen von ruhenden und bewegten elektrischen Ladungen erzeugt. Die genaue Beschreibung wird hier von den schon oft erwähnten vier Maxwell'schen Gleichungen gegeben. Diese Gleichungen, welche die Entstehung der Kraftfelder beschreiben, können wir hier nur erwähnen und nicht detailliert vorstellen.

5 Gleichungen beschreiben also vollständig, woher die Kraftfelder rühren, 3 Gleichungen beschreiben, auf wen und in welche Richtung diese wirken, und *eine* weitere Gleichung beschreibt die Folgen für die Bahn eines Teilchens. Zusammen mit den 4 Erhaltungssätzen haben wir damit die Essenz der klassischen Physik auf einer einzigen Seite dargestellt.

Es ist eine enorme geistige Leistung, die Fülle der Phänomene, die sich einem Beobachter der äusseren Welt (deren Existenz hier einfach postuliert sei) zeigen, auf diesen kleinen Kern von Lehrsätzen zurückzuführen. Welche Ökonomie der Begriffe, welche Sparsamkeit bei der Setzung von Axiomen! Die geometrischen Details und die Materialzusammensetzung in einer Apparatur mögen noch so kompliziert sein - alles, was sich darin abspielt, wird durch unsere Handvoll von Gleichungen vollständig beschrieben.

Mechanik, Wärmelehre und Elektromagnetismus umfassen dabei *alle* Phänomene, die im 19. Jh. als zur Physik gehörig betrachtet wurden, und nur ganz wenigen Physikern wie Lorentz, Planck und Poincaré war um 1900 bewusst, dass dieses Bild nicht so harmonisch, vollständig und in sich geschlossen war, wie die meisten damals meinten. Die Bedrohung kam auch nicht von der Seite der 'Atomisten'. Dass die Materie körnig aufgebaut ist und nicht kontinuierlich, stört eigentlich nicht weiter. Aber da war das Problem der Bewegung der Erde durch den Äther und die damit erwarteten Schwankungen der Lichtgeschwindigkeit (siehe **A3**). Ein weiteres Problemfeld hat Max Planck 1900 eröffnet: Es gelang ihm zwar, die experimentell gut erforschte Frequenzverteilung in der Strahlung eines 'Schwarzen Körpers' von einer bestimmten Temperatur theoretisch abzuleiten, er musste dabei aber ziemlich abenteuerlichen Hypothesen über die 'Körnigkeit' der Strahlungsenergie und eine eigenartige statistische Zählweise verwenden. Überdies wurden mit der Röntgenstrahlung, dem strahlenden Radium des Ehepaars Curie, der Alpha-, Beta- und Gammastrahlung von Rutherford und anderen fast jedes Jahr ganz neue Forschungsgebiete eröffnet. Das grossartige Gebäude der klassischen Physik war also kaum fertig errichtet, als sich schon Risse darin zeigten und diverse Anbauten erforderlich wurden.

Im nächsten Abschnitt sehen wir in der Übersicht, welche Korrekturen die SRT an diesem Kern der klassischen Physik vornimmt, um den einen grossen Riss darin erfolgreich zu sanieren: Die Inkompatibilität der Newton'schen Mechanik, des Galilei'schen Relativitätsprinzips und der Maxwell'schen Gleichungen.



Auch am anderen grossen Riss, der sich mit Planck's Arbeit zur Strahlung auftat, hat Einstein 1905 erfolgreich gearbeitet. Wie schon in **A4** erwähnt hat er die entsprechende Arbeit "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt" [12-197ff] in einem Brief an Conrad Habicht selber als 'sehr revolutionär' bezeichnet.

Weitere Arbeiten desselben Frühjahrs waren statistischer Natur und lieferten starke neue Argumente für die Seite der 'Atomisten'.

## F2 Die relativistischen Korrekturen

Welche Eingriffe nimmt die SRT am Gebäude der klassischen Physik vor, um die inneren Widersprüche zwischen der Mechanik, dem Relativitätsprinzip und der Theorie des Elektromagnetismus zu beseitigen? Es sind eigentlich wenige - dafür sehr fundamentale:

1. Zeitmessungen sind immer auf *ein* Koordinatensystem bezogen und nicht universell
2. Längenmessungen sind immer auf *ein* Koordinatensystem bezogen und nicht universell
3. Die träge Masse ist (ebenfalls) abhängig von der Relativgeschwindigkeit
4. Energiezufuhr bedeutet auch eine Zufuhr von träger Masse

Die Details zu diesen Eingriffen sind in den vorangegangenen Kapiteln genau erarbeitet worden. Welches sind jetzt aber die Folgen für die 4 wichtigsten Grössen der Physik und die zugehörigen Erhaltungssätze?

1. Der Erhaltungssatz für elektrische Ladungen gilt weiterhin unverändert
2. Der Erhaltungssatz für die träge Masse verschmilzt mit demjenigen für die Energie zu einem einzigen Erhaltungssatz, da ja jeder Energiemenge eine bestimmte träge Masse entspricht und umgekehrt
3. Der Erhaltungssatz für den Gesamtimpuls gilt weiterhin, wobei neu der Impuls als  $m_v \cdot \mathbf{v}$  zu berechnen ist, die Masse also abhängig ist von der Relativgeschwindigkeit

Was bleibt von den drei Newton'schen Gesetzen übrig? Interessanterweise bleiben alle drei unverändert gültig, es muss einzig die relativistische Präzisierung des Impulsbegriffes berücksichtigt werden. Insbesondere gilt also weiterhin  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ . Eigentlich ist das die Definition der Kraft.

Und wie steht es mit den Kraftwirkungen und den zugehörigen Kraftfeldern? Gibt es weiterhin deren drei? Hier ist die Antwort ein "ja, aber ...". Die SRT bringt ja die Maxwell'sche Theorie zur uneingeschränkten Gültigkeit in allen Inertialsystemen, es ist daher nicht verwunderlich, dass das Coulomb-Kraftgesetz und dasjenige zur Lorentz-Kraft weiterhin gelten. Auch bei der Erzeugung der entsprechenden Kraftfelder gibt es nicht die kleinste Änderung. Das 'aber' bezieht sich auf die Erzeugung des Gravitationsfeldes: Die *sofortige* Fernwirkung von Massen in Newtons Gravitationsgesetz widerspricht dem Ergebnis der SRT, dass  $c$  eine Grenzgeschwindigkeit für Massen-, Energie- und Informationsübertragungen ist. Diese Fernwirkung durch den leeren Raum war übrigens auch Newton selber etwas unheimlich. Am Ende seines grossen Werkes [2-515f] schreibt er dazu:

Bisher habe ich die Erscheinungen am Himmel und in unseren Meeren mit Hilfe der Kraft der Schwere erklärt, aber eine Ursache für die Schwere habe ich noch nicht angegeben. Diese Kraft rührt zweifellos von irgendeiner Ursache her, welche bis zu den Mittelpunkten der Sonne und der Planeten vordringt ... Ihre Einwirkung breitet sich nach allen Seiten hin bis in unermessliche Entfernungen aus, wobei sie im zweifachen Verhältnis zu den Entfernungen abnimmt. ... Den Grund für diese Eigenschaften der Schwere konnte ich aber aus den Naturerscheinungen noch nicht ableiten, und Hypothesen erdichte ich nicht. ... Es genügt, dass die Schwere wirklich existiert, entsprechend den von uns dargelegten Gesetzen wirkt und für [die Erklärung] alle[r] Bewegungen der Himmelskörper und des Meeres ausreicht.

Einstein hat ab 1906 daran gearbeitet, die Gravitation in die SRT zu integrieren. 1907 hat er mit dem *Äquivalenzprinzip* einen Angriffspunkt gefunden. Es brauchte aber noch Jahre harter Arbeit und die Hilfe von befreundeten Mathematikern, bis er Ende 1915 die bis heute gültige Gleichung vorlegen konnte, welche Raum, Zeit *und* Gravitation umfasst und dieses Problem gelöst hat. Das Äquivalenzprinzip hat er später "den glücklichsten Gedanken meines Lebens" genannt. Mehr dazu folgt im nächsten Kapitel, welchem zufälligerweise der Buchstabe **G** wie Gravitation zugeordnet ist.

Wir wollen uns noch dem neuen Erhaltungssatz zuwenden, der die beiden separaten Erhaltungssätze für die Masse und die Energie ablöst. Er kann wahlweise als Erhaltungssatz für die gesamte träge Masse in einem abgeschlossenen System formuliert werden, wobei alle Energiebeiträge  $\Delta E_i$  mit ihrem Beitrag  $\Delta E_i / c^2$  bei der Massebilanz mitgezählt werden müssen - oder aber als Erhaltungssatz für die gesamte Energie, wobei dann alle beteiligten Massen  $m_i$  mit dem Betrag  $m_i \cdot c^2$  in die Energiebilanz eingehen. Meist wird diese zweite Darstellung bevorzugt. Ich möchte die beiden äquivalenten Möglichkeiten an einem Beispiel illustrieren:

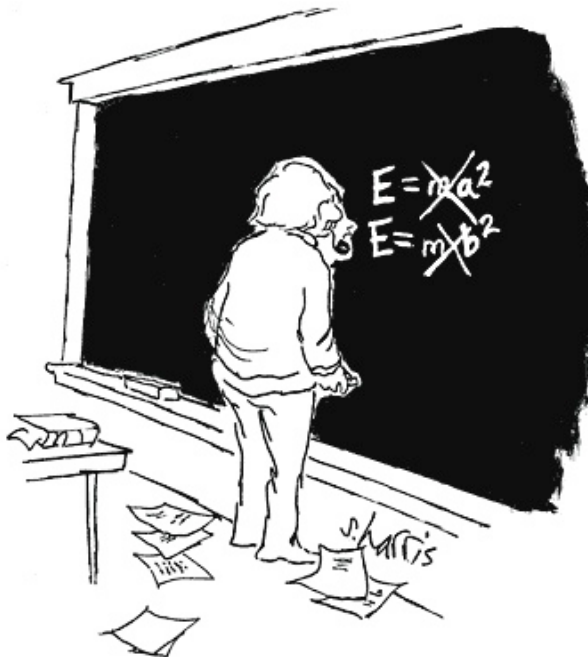
Denken wir uns einen ungeladenen Kondensator der Ruhemasse  $m_0$ . Welche gesamte Masse steuert er zur Bilanz bei, wenn er zuerst geladen und dann noch beschleunigt wird? Beim Laden wird ihm die Energie  $\Delta E = 0.5 \cdot C \cdot U^2$  zugeführt, daher nimmt seine Ruhemasse um den Betrag  $\Delta E/c^2$  zu. Diese erhöhte Ruhemasse ist dann noch durch den Wurzelterm zu dividieren, wenn der Kondensator beschleunigt worden ist. Dies liefert den gesamten Beitrag  $(m_0 + \Delta E/c^2) / \gamma$  für die Massebilanz.

Der gesamte Beitrag zur Energiebilanz berechnet sich folgendermassen: Da ist die Ruheenergie  $m_0 \cdot c^2$ , dann die Energie  $\Delta E = 0.5 \cdot C \cdot U^2$ , die beim Laden des ruhenden Kondensators zugeführt wird, und schliesslich noch die kinetische Energie nach dem Beschleunigen. Beschleunigt wird aber *nach* dem Laden, also der schon etwas schwerere *geladene* Kondensator wird beschleunigt, und wir müssen deshalb für die kinetische Energie  $(m_0 + \Delta E/c^2) \cdot c^2 \cdot (1/\gamma - 1)$  einsetzen. Total haben wir also  $m_0 \cdot c^2 + \Delta E + (m_0 + \Delta E/c^2) \cdot c^2 \cdot (1/\gamma - 1) = (m_0 + \Delta E/c^2) \cdot c^2 / \gamma$ , was genau dem Beitrag bei der Massebilanz multipliziert mit dem Faktor  $c^2$  entspricht !

Es ist also recht willkürlich, aber nicht falsch, wenn man diesen umfassenden Erhaltungssatz immer noch als 'Erhaltungssatz der Gesamtenergie' bezeichnet. Genauso richtig wäre die Bezeichnung als 'Erhaltungssatz der Gesamtmasse', die beiden Bilanzen unterscheiden sich nur um den Faktor  $c^2$  auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens:

$$\sum E_{\text{tot},i} (\text{vorher}) = \sum E_{\text{tot},j} (\text{nachher}) \quad \text{oder} \quad \sum m_{v,i} (\text{vorher}) = \sum m_{v,j} (\text{nachher})$$

Soviel zur Physik aus der Adlerperspektive. Die folgenden Abschnitte bringen Beispiele zu diesen jetzt noch 3 Erhaltungssätzen. Sie zeigen damit auch, dass die Welt ohne SRT nicht verstanden werden kann.



Karikatur von Sidney Harris  
©ScienceCartoonsPlus.com

### F3 Beispiele zur Masse-Energie-Erhaltung

#### Die Fusion von Wasserstoff zu Helium

Ist eine Wolke von Wasserstoffgas genügend heiss und dicht, dann gibt es keine H<sub>2</sub>-Moleküle mehr, ja nicht einmal mehr H-Atome, sondern nur noch ein Plasma von ungebundenen Protonen und Elektronen. In diesem Plasma kommt es sehr häufig zu Frontalkollisionen von Protonen. Bei kleineren Temperaturen lassen sie sich von der Coulomb-Abstossung auf null abbremsen (es gibt immer ein Koordinatensystem, in welchem der Gesamtimpuls zweier Teilchen null ist ...) und rasen dann wieder dorthin, woher sie gekommen sind. Ist die Kollision nicht ganz frontal, so zischen sie auf Hyperbelbahnen aneinander vorbei. Ist die Temperatur aber ausreichend hoch, so kommen sie sich bei einer Frontalkollision derart nahe, dass die kurzreichweitige Starke Kraft zwischen den beiden Kernteilchen zu wirken beginnt, und sie schliessen sich unter Emission eines Positrons e<sup>+</sup> und eines Neutrinos  $\nu$  zu einem Deuteriumkern, bestehend aus einem Proton und einem Neutron, zusammen. Das Neutrino brauchen wir nur, um gewissen weiteren Erhaltungssätzen (hier der Leptonenzahl) der Teilchenphysik zu genügen. Das Positron wird bald auf ein Elektron e<sup>-</sup> stossen, wobei die beiden Teilchen einander 'vernichten', d.h. zu zwei Energiequanten alias Photonen zerstrahlen (siehe F5).

Zwei Deuteriumkerne könnten alsdann direkt zu einem He-Kern, bestehend aus zwei Protonen und zwei Neutronen, fusionieren. Häufiger wird aber ein weiteres Proton mit dem Deuterium zu einem He-3-Kern verschmelzen, und zwei solche He-3-Kerne werden unter Emission zweier Protonen zu einem gewöhnlichen He-4-Kern fusionieren. Es sind noch andere Wege möglich - letztlich wird aber immer aus 4 Protonen und 2 Elektronen ein He-4-Kern gebildet unter Emission zweier Neutrinos.

Nun kennt man die Ruhemassen all dieser Teilchen mit hoher Präzision (Stichwort Massenspektrograph). Wir stellen eine Massenbilanz auf:

vorher	4 Protonen	4·1.007'825 u	
	2 Elektronen	2·0.000'056 u	
	total		4.032'420 u
nachher	1 He-4-Kern	4.002'603 u	
	2 Neutrinos	2·0.000'000 u	
	total		4.002'603 u
'Verschwundene' Masse			0.029'817 u

Bei der Fusion eines einzigen He-Kernes aus Protonen wird also die Energie frei, welche einer Masse von 0.029'817 Atommasseneinheiten entspricht. Fusionieren wir ein ganzes Mol Helium, so können wir diesen Betrag mit der Avogadro-Zahl multiplizieren und erhalten etwa 2.6·10<sup>12</sup> J. Bei dieser Fusion 'verschwinden' 0.029'817 / 4.032'420 ≈ 0.74 % der ursprünglichen Ruhemasse.

Diese Fusion läuft wie gesagt nur unter extremen Bedingungen ab (Wasserstoffbomben müssen daher mit einer 'gewöhnlichen' Uranbombe gezündet werden ...). Kein materielles Gefäss könnte ein solches Plasma einschliessen. Es werden aber jetzt Forschungsreaktoren gebaut, in denen man diesen Prozess kontrolliert ablaufen lassen will. Die Fusion hätte gegenüber der Kernspaltung den grossen Vorteil, dass sie keine langlebigen radioaktiven Substanzen erzeugt.

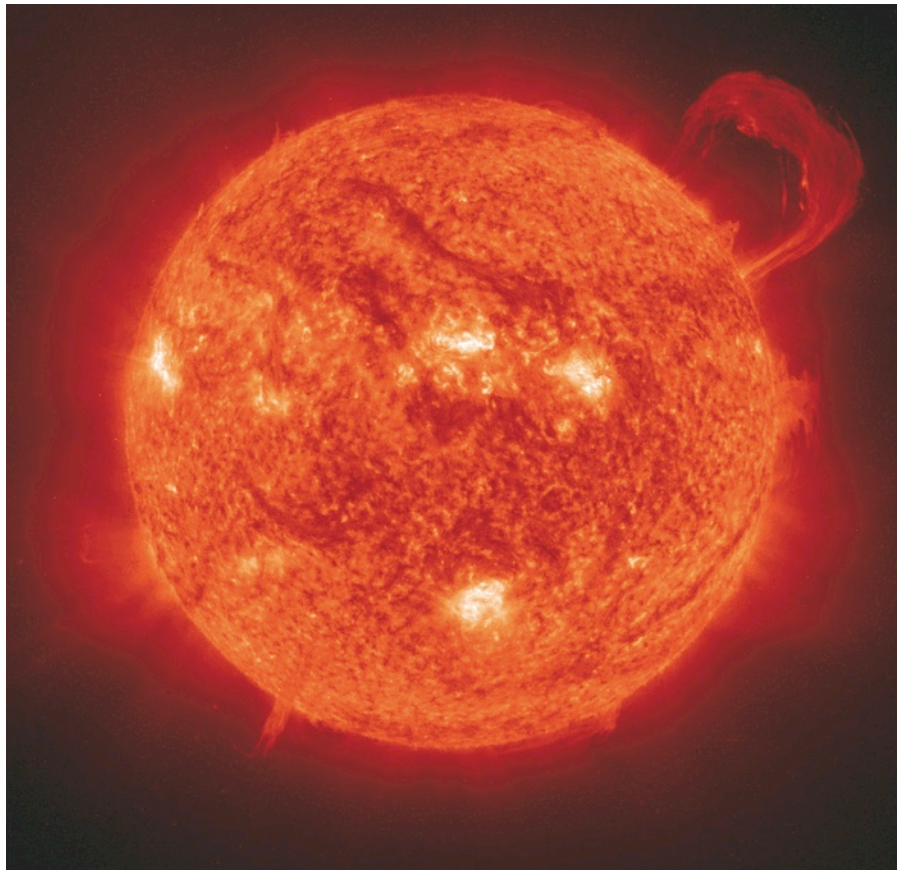
Die geschilderte Fusionsreaktion illustriert übrigens auch die Erhaltung der elektrischen Ladung!

## Der Energiehaushalt unserer Sonne

Eigentlich müsste man von Verschwendung sprechen und nicht vom Haushalten: Die Sonne strahlt seit Jahrtausenden ungeheure Energiemengen ab. Noch um 1900 hatte man nicht die kleinste Idee, woher sie diese Energie nimmt. Man konnte sich ausrechnen, dass eine Sonne aus reiner Steinkohle (mal abgesehen vom Sauerstoff, den es für die Verbrennung noch brauchen würde) nach wenigen 1000 Jahren ausgebrannt wäre. Heute würde man die Rechnung natürlich mit Erdöl machen ...

Die Gesamtleistung der Sonne lässt sich recht einfach berechnen: In den Hochalpen misst man einen Energiefluss von etwa  $1380 \text{ W/m}^2$ , die sogenannte 'Solarkonstante'. Nimmt man an, dass die Sonne ihre Strahlung kugelsymmetrisch abgibt, so kann man diese Leistung pro Quadratmeter mit der Oberfläche der Kugel multiplizieren, deren Radius auch der mittlere Radius der Erdbahn ist. So erhält man die  $3.85 \cdot 10^{26} \text{ W}$ , mit welchen die Glühbirne 'Sonne' angeschrieben werden müsste.

Diese Energie wird (wie bei allen 'Hauptreihensternen') im wesentlichen durch die Fusion von Wasserstoff zu Helium erzeugt. Pro Sekunde werden also  $3.85 \cdot 10^{26} \text{ J}$  abgestrahlt. Wir erhalten den entsprechenden Massenverlust, wenn wir diese Zahl durch  $c^2$  dividieren: Pro Sekunde verstrahlt die Sonne etwa  $4.28 \cdot 10^9 \text{ kg}$  Materie, das sind 4.28 Mio Tonnen! In einem Jahr sind das schon  $1.35 \cdot 10^{17} \text{ kg}$ , und in 10 Milliarden Jahren  $1.35 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ . Setzen wir diese Zahl in Beziehung zur Gesamtmasse der Sonne:  $1.35 \cdot 10^{27} / 1.99 \cdot 10^{30} \approx 0.000678$ . In 10 Mia Jahren verliert die Sonne so weniger als 1 Promille ihrer gesamten Masse.



SOHO - Bild der Sonne vom 14. September 1999 mit einer gewaltigen Eruption, die sich intensiv im UV-Licht des einfach ionisierten Heliums zeigt, also bei 304 Angström  
<http://soho.esac.esa.int/gallery/images/superprom.html> (© ESA and NASA)

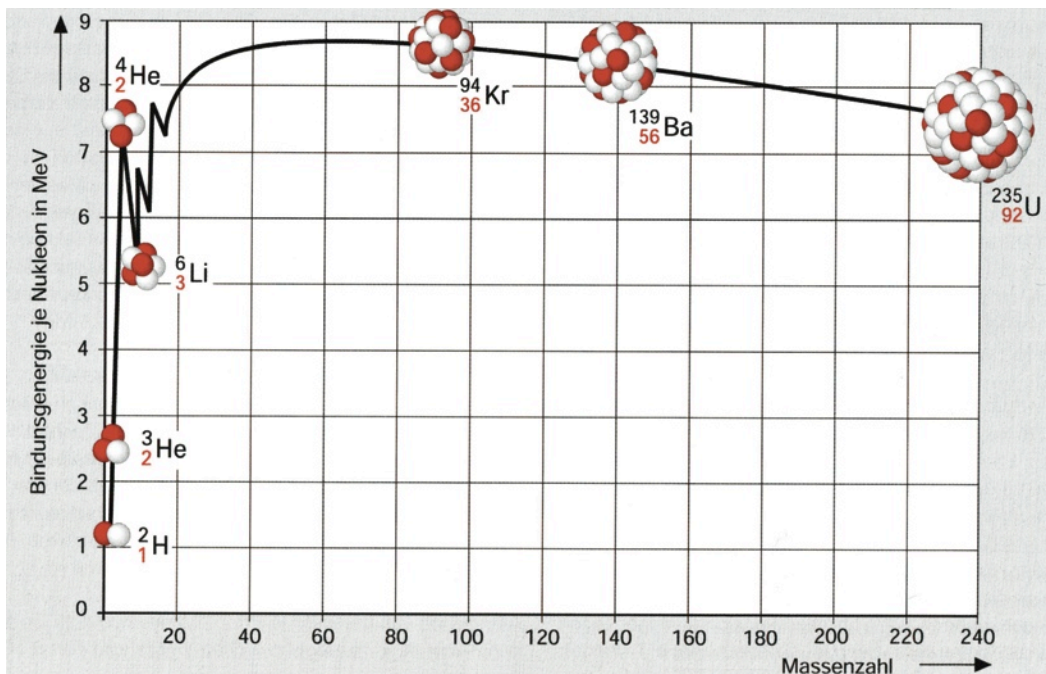
Auch wenn die Sonne nach 10 Mia Jahren erst weniger als 1 Promille ihrer Masse verstrahlt hat, erreicht sie dann doch das Ende ihrer Zeit als Hauptreihenstern, weil in ihrem Zentrum, wo die für die Fusion nötigen extremen Bedingungen herrschen, die Konzentration an Wasserstoff stark abgenommen hat zugunsten derjenigen von Helium. Wenn pro Sekunde  $4.28 \cdot 10^9$  kg Materie verstrahlt werden, so sind das die 0.74 % der Wasserstoffmasse, die nicht mehr im Helium erscheinen. Pro Sekunde müssen also  $5.78 \cdot 10^{11}$  kg Wasserstoff in Helium umgewandelt werden. So lässt sich die Entwicklung der Wasserstoffkonzentration und der Heliumkonzentration berechnen und man gelangt zu einem Modell von der Sonne, welches den Druck, die Temperatur und die chemische Zusammensetzung in Abhängigkeit vom Abstand von der Sonnenmitte und der Zeit angibt. In einem stabilen Zustand muss dabei für jeden Abstand  $r$  von der Sonnenmitte der Druck der erzeugten Strahlung den Gravitationsdruck der äusseren Kugelschale gerade kompensieren.

Man nimmt heute an, dass die Sonne und das Planetensystem vor etwa 5 Mia Jahren entstanden sind, und zwar aus dem 'Abfall' einer früheren Sternengeneration (sonst gäbe es auf der Erde kein Uran und andere Elemente, die schwerer sind als Eisen). Die Sonne wird somit noch etwa 5 Mia Jahre mit derselben Intensität und recht stabil weiterstrahlen. Dann beginnt eine andere Phase ...

Die Astrophysik kann heute die Geburt, das Leben und das Sterben von verschiedenen Typen von Sternen recht detailliert modellieren. Ich wollte Sie hier nur ein bisschen auf den Geschmack bringen.

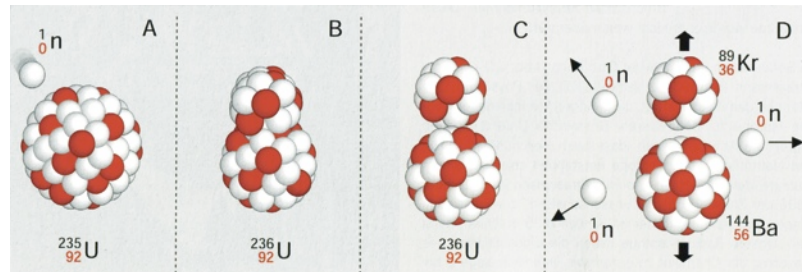
### Radioaktiver Zerfall und Spaltung von schweren Atomkernen

Die beiden Protonen und die 2 Neutronen im Heliumkern sind durch starke Kräfte aneinander gebunden. Diese Bindungsenergie entspricht genau der bei der Fusion freigesetzten Energie. Nun kann man für alle Atome oder besser für alle Isotope die mittlere Bindungsenergie pro Kernteilchen ermitteln und erhält dann das folgende Diagramm:



Der Energiegewinn ist offenbar besonders gross, wenn man Protonen zu Helium fusioniert. Man kann aber auch Energie gewinnen, wenn man schwere Kerne spaltet. In Kernen, die schwerer sind als Eisen (Fe-57), sind die Kernteilchen im Mittel wieder weniger stark aneinander gebunden. So wird auch Energie freigesetzt, wenn man einen schweren Kern in zwei mittelschwere spaltet.

Insbesondere das Uranisotop U-235 braucht nur mit Neutronen geeigneter kinetischer Energie beschossen zu werden, um zum Zerfall zB in ein Kr-89 und Ba-144 angeregt zu werden. Weil dabei auch noch drei weitere schnelle Neutronen erzeugt werden, eignet sich dieser Prozess für eine Kettenreaktion:

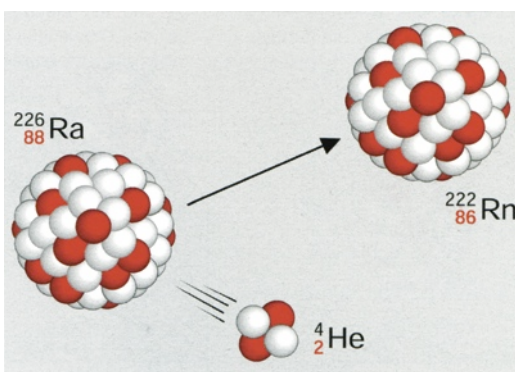


Wenn wir die Ruhemassen der beteiligten Kerne kennen würden, könnten wir wieder die Massenbilanz machen wie bei der Fusion von Wasserstoff zu Helium. Die beiden Spaltprodukte sind aber extrem instabil (viel zu viele Neutronen im Kern) und ihre Ruhemassen sind deshalb in den gängigen Tabellen gar nicht aufgeführt. Machen wir also eine andere Rechnung (die sich aber letztlich ebenfalls auf genaue Messungen der Ruhemassen abstützt): Im Uran-235 ist die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon etwa 7.6 MeV, beim Krypton-89 beträgt der entsprechende Wert 8.6 MeV und beim Barium-144 sind es etwa 8.4 MeV (siehe Tabelle links unten). Daraus ergibt sich, dass bei der Spaltung eines einzigen U-235-Kerns eine Energie von

$$89 \cdot 8.6 \text{ MeV} + 144 \cdot 8.4 \text{ MeV} - 235 \cdot 7.6 \text{ MeV} \approx 198 \text{ MeV}$$

freigesetzt wird. Da die beiden Produkte praktisch sofort weiter zerfallen (Betazerfall), werden zusätzlich einige MeV freigesetzt, womit man auf einen gesamten Energiebetrag von 210 MeV pro gespaltenem U-235-Kern kommt. Rechnen wir das hoch auf ein Mol Uran-235: Bei der vollständigen Spaltung von 235 Gramm U-235 wird eine Energie von  $6.02 \cdot 10^{23} \cdot 210 \text{ MeV} \approx 2.0 \cdot 10^{13} \text{ Joule} \approx 20 \text{ TJ}$  freigesetzt. Der entsprechende 'Massenverlust' ist  $20 \text{ TJ} / c^2 \approx 0.225 \text{ Gramm}$ , also etwas weniger als ein Promille.

Ausgezeichnete Informationen zu den Grundlagen der Spalttechnik und den verschiedenen eingesetzten Reaktortypen bietet die Publikation [23], welche von den Deutschen Kernkraftwerksbetreibern herausgegeben worden ist und der auch die drei Illustrationen in diesem Abschnitt entnommen worden sind. Nur der Abschnitt "Endlagerung von hochradioaktiven Abfällen" ist - dem Stand der Projektarbeiten entsprechend - recht kurz ausgefallen ...



Auch beim radioaktiven Zerfall wird Energie freigesetzt: Der beim  $\alpha$ -Zerfall spontan aus dem Kern eines Radium-Atoms entweichende Heliumkern ist mit viel kinetischer Energie ausgestattet. Auch zu diesem Thema informiert [23] ausgezeichnet. Für die Erlaubnis zum Nachdruck der drei Illustrationen möchte ich der Vattenfall Europe AG und dem Informationskreis KernEnergie in Berlin danken.

## F4 Relativistische Stösse

### Der inelastische zentrale Stoss gegen ein ruhendes gleichartiges Teilchen

Ein Teilchen der Ruhemasse  $m_o$  soll mit  $v = 12/13 \cdot c$  gegen ein ruhendes Teilchen derselben Art stossen und dabei mit diesem zu einem neuen Teilchen der Ruhemasse  $M_o$  verschmelzen, welches nach seiner Erzeugung die Geschwindigkeit  $u$  aufweise. Dabei müssen der Impulserhaltungssatz und der Energie-Massen-Erhaltungssatz erfüllt sein:

$$m_v \cdot v + m_o \cdot 0 = M_u \cdot u \quad \text{und} \quad m_v \cdot c^2 + m_o \cdot c^2 = M_u \cdot c^2$$

also  $m_v \cdot v = M_u \cdot u$  und  $m_o + m_v = M_u$  nebst  $m_v = m_o / \sqrt{1 - (v/c)^2} = m_o / (5/13) = 2.6 \cdot m_o$

somit  $u = v \cdot (m_v / M_u) = v \cdot (m_v / (m_o + m_v)) = v \cdot (1 / (\sqrt{1 - (v/c)^2} + 1)) = 12/13 \cdot c \cdot (1 / (5/13 + 1)) = 2/3 \cdot c$

und  $M_o = M_u \cdot \sqrt{1 - (2/3)^2} \approx (m_o + m_v) \cdot 0.745 \approx m_o \cdot 3.6 \cdot 0.745 \approx 2.68 \cdot m_o$

### Der inelastische zentrale Stoss zweier gegenläufiger gleichartiger Teilchen

Zwei Teilchen der Ruhemasse  $m_o$  sollen nun mit  $v = \pm 12/13 \cdot c$  frontal gegeneinander stossen und dabei zu einem neuen Teilchen der Ruhemasse  $M_o$  verschmelzen. Wir schreiben wieder die beiden Erhaltungssätze auf:

$$m_v \cdot v + m_v \cdot (-v) = M_u \cdot u \quad \text{und} \quad m_v \cdot c^2 + m_v \cdot c^2 = M_u \cdot c^2$$

also  $0 = M_u \cdot u$  und  $2 \cdot m_v = M_u$  nebst  $m_v = m_o / \sqrt{1 - (v/c)^2} = m_o / (5/13) = 2.6 \cdot m_o$

somit  $u = 0$  und  $M_u = M_o = 2 \cdot m_v = 2 \cdot 2.6 \cdot m_o = 5.2 \cdot m_o$

Der numerische Unterschied der beiden Verfahren ist hier nicht sehr beeindruckend. Dies kommt aber nur daher, dass wir in unserer Rechnung nicht 'nahe an  $c$  herangegangen' sind. Für  $v \rightarrow c$  geht aber der Ausdruck  $v \cdot (1 / (\sqrt{1 - (v/c)^2} + 1))$  für  $u$  immer mehr gegen  $v$ , was bedeutet, dass das erzeugte Teilchen ebenfalls eine Geschwindigkeit hat, welche sehr nahe bei  $c$  liegt, und dass  $M_v$  daher *viel* grösser ist als  $M_o$ ! Heutige Beschleuniger liefern Teilchen mit Geschwindigkeiten, die nur noch um wenige m/s oder gar cm/s kleiner sind als  $c$ ! Es braucht dann mit der oberen Methode enorm viel grössere Energien, um ein schweres (evtl. noch hypothetisches) Teilchen einer bestimmten Ruhemasse zu erzeugen, weil ein grosser Teil der investierten Energie noch für die unvermeidliche kinetische Energie des erzeugten Teilchens aufgewendet werden muss. Nur mit der unteren Methode kann die ganze investierte Energie zur Erzeugung des neuen Teilchens genutzt werden ( $\rightarrow$  Aufgaben 4 und 5).

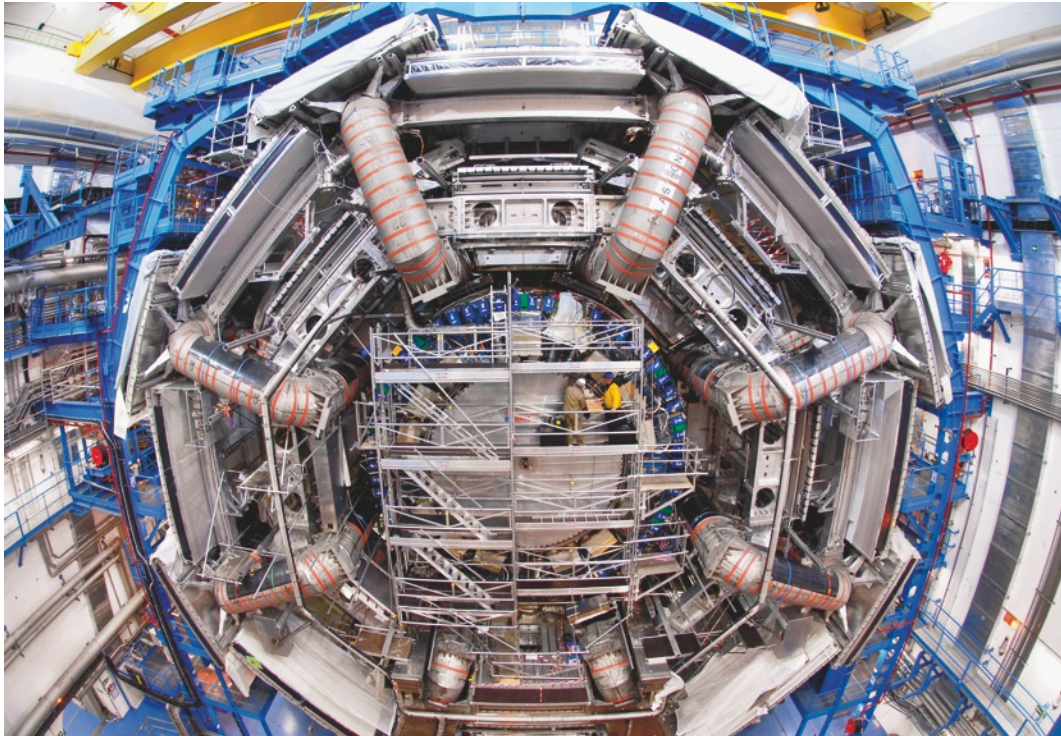
Dies ist der Grund dafür, dass moderne Anlagen gerne mit Doppel-Speicherringen ausgerüstet werden, in denen die Teilchen (oder Teilchen und Antiteilchen) gegenläufig mit Geschwindigkeiten sehr nahe bei  $c$  herumrasen, um dann im Innern von gewaltigen Detektoren zur Frontalkollision gebracht zu werden. Eine solche Anlage für die (leichten) Elektronen und Positronen läuft schon viele Jahre in der Nähe von Hamburg (DESY ~ Deutsches Elektronensynchrotron). Lesen Sie den entsprechenden Abschnitt im Lehrbuch [8] von Sexl! Das CERN bei Genf baut seine grosse Anlage im Moment (2006) gerade entsprechend um für die viel schwereren Protonen (LHC ~ Large Hadron Collider).

Sowohl das DESY ([www.desy.de](http://www.desy.de)) als auch das CERN ([www.cern.ch](http://www.cern.ch)) unterhalten informative Webseiten. Am CERN wurde ja übrigens von Tim Berners Lee auch das Internet in seiner heutigen Form entwickelt, um die Bildung von Teams zu erleichtern, deren Mitglieder in beliebigen Ecken der Welt leben und arbeiten.



Blick in den 28 km langen kreisförmigen Tunnel, der 100 m unter der Erdoberfläche liegt. Seit Frühjahr 2005 werden hier die supraleitenden Magnete montiert, welche die Protonen in den beiden Speicherringen auf der Kreisbahn halten werden.

[http://doc.cern.ch/archive/electronic/cern/others/PHO/photo-ac/0504028\\_06.jpg](http://doc.cern.ch/archive/electronic/cern/others/PHO/photo-ac/0504028_06.jpg) (© CERN)

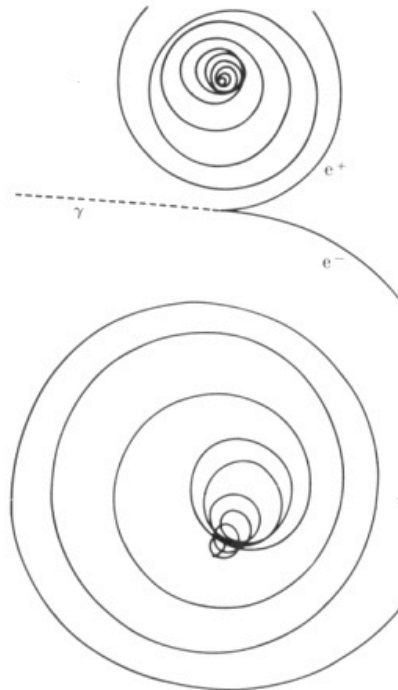


Montage von ATLAS, einem der vier enormen Detektoren, welche die Produkte registrieren sollen, die bei der Frontalkollision der Protonen entstehen. Es fallen dabei kurzzeitig soviele Daten an wie im ganzen europäischen Telekom-Netz.

[http://doc.cern.ch/archive/electronic/cern/others/PHO/photo-ex/0611040\\_02.jpg](http://doc.cern.ch/archive/electronic/cern/others/PHO/photo-ex/0611040_02.jpg) (© CERN)

## F5 Erzeugung und Vernichtung von Teilchen

Das Bild zeigt die Entstehung eines Elektron-Positron-Paares aus einem Photon hoher Energie, einem sogenannten  $\gamma$ -Quant. Das Photon hinterlässt keine Spur in der Blasenkammer, da es ungeladen ist. Elektron und Positron werden durch ein Magnetfeld, welches senkrecht steht auf der Bildebene, wegen ihrer unterschiedlichen elektrischen Ladung von der Lorentz-Kraft in entgegengesetzte Richtungen abgelenkt. Das Photon muss von links ins Bild gekommen sein, und wir sehen hier gleichzeitig alle drei Erhaltungssätze in Aktion:



Der Impuls (und damit auch die Gesamtenergie, die kinetische Energie und die Geschwindigkeit) des Elektrons und des Positrons lassen sich aus den Bahnradien zu Beginn der spiralförmigen Bewegung ermitteln, da ja die Stärke des angelegten Magnetfeldes bekannt ist. Es gilt

$$m_e \cdot v^2 / r = e \cdot v \cdot B, \quad \text{also } p = e \cdot r \cdot B, \quad \text{und dann haben wir ja noch } E_{\text{tot}}^2 = E_0^2 + p^2 \cdot c^2$$

Die Aufgabe 7 im Abschnitt **F7** bezieht sich auf diese Situation.

Pionen, Myonen und viele weitere Teilchen werden dauernd millionenfach erzeugt durch den Aufprall von hochenergetischen Quanten der kosmischen Strahlung auf Atome in der Erdatmosphäre. Antiprotonen werden heute am CERN in grosser Zahl seriemässig produziert, und ebenfalls am CERN hat man aus Antiprotonen und Positronen schon Anti-Wasserstoffatome erzeugt.

Trifft ein Positron auf ein Elektron, so werden die beiden Teilchen in zwei Photonen 'zerstrahlen'. Der Impulserhaltungssatz erzwingt, dass es mindestens *zwei* Photonen sind: Der Gesamtimpuls *eines* Photons kann ja in keinem Koordinatensystem Null sein, während der Gesamtimpuls der beiden Teilchen im Schwerpunktsystem immer null ist! Aus demselben Grund kann ein Photon auch kein Elektron-Positron-Paar ohne Beteiligung eines weiteren Teilchens erzeugen. Das Ereignis findet immer in unmittelbarer Nähe eines Atomkerns statt.

Surf-Tipp:

[http://teachers.web.cern.ch/teachers/archiv/HST2005/bubble\\_chambers/BCwebsite/index.htm](http://teachers.web.cern.ch/teachers/archiv/HST2005/bubble_chambers/BCwebsite/index.htm)

## F6 Wie es jetzt weitergehen könnte

Wenn wir die wichtigsten Ergebnisse der SRT vollständig darstellen wollten, müsste es im nächsten Kapitel etwa folgendermassen weitergehen:

- Ein vorbereitender Abschnitt, in dem herausgearbeitet wird, wie sich Kräfte und Beschleunigungen transformieren. Alles dazu Notwendige haben wir bereitgestellt
- Ein zweiter Abschnitt, in welchem untersucht wird, was mit der Lorentz-Kraft geschieht, die ja auf schnelle Elektronen wirkt, wenn man die Sache im System des schnellen Elektrons selber darstellt
- Dann sollte allgemein abgeleitet werden, wie sich elektrische und magnetische Felder in der SRT transformieren

Diese drei Punkte sind eigentlich unverzichtbar. Erst mit ihnen ist das Ziel von Einstein erreicht, die Asymmetrien zu erklären, "welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen". Vielleicht erscheint mal eine erweiterte Ausgabe dieses Buches - im Moment möchte ich einfach auf schöne Darstellungen von anderen Autoren verweisen:

- Michael Fowler gibt im Kapitel 16 seines im Internet frei zugänglichen Skripts [24] einen elementaren Zugang zur Transformation des elektromagnetischen Feldes. [24] ist überhaupt eine sehr schöne elementare Darstellung der SRT und die einzige, die ich gefunden habe, welche ebenfalls die Desynchronisation als Grundphänomen quantitativ einsetzt !
- Roman Sexl und Herbert K. Schmidt liefern im Kapitel 16 von [25] eine Herleitung der Transformation der elektromagnetischen Grössen ohne Verwendung von höherer Analysis. Sie benutzen dabei das Rechnen mit Vierervektoren. Diese elegante mathematische Einkleidung der SRT wird vorher gut verständlich eingeführt.

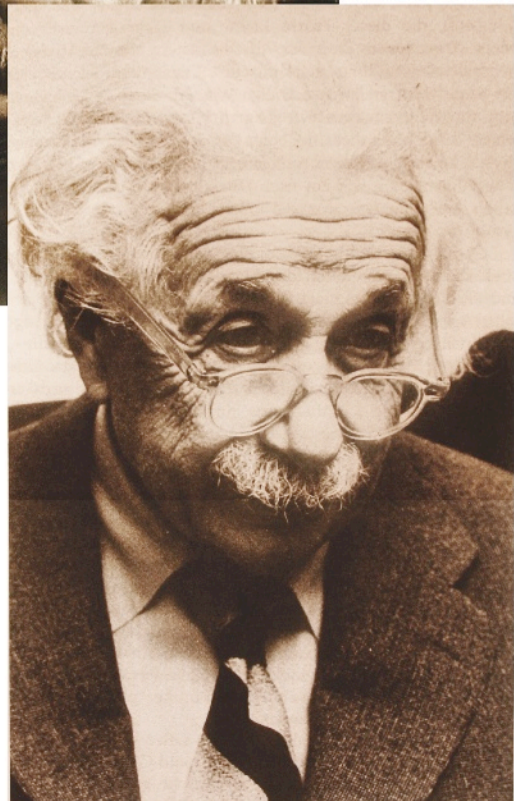
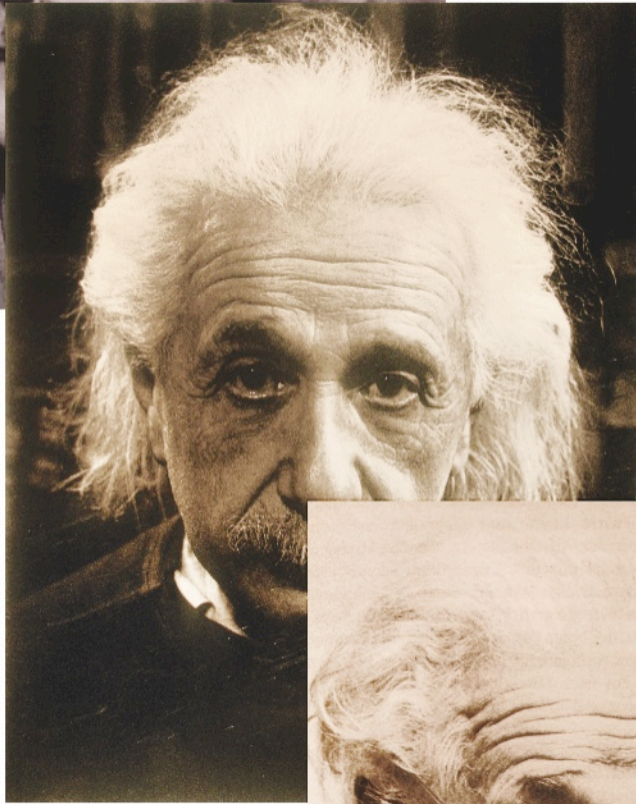
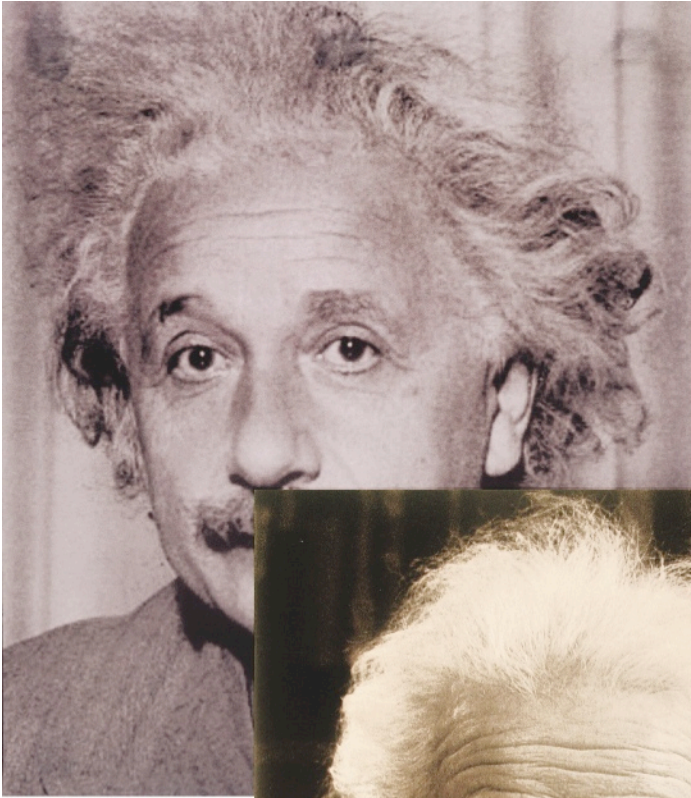
Auch bei den bereits behandelten Themen könnte man noch einige Vertiefungen anbringen:

- Transformation und Addition von beliebigen Geschwindigkeiten. Wir haben nur Geschwindigkeiten parallel und senkrecht zu  $v$  betrachtet. Daraus könnte man dann auch die allgemeine Formel für die Aberration ableiten
- Allgemeine Dopplerformel. Wir haben nur die Frequenzveränderungen bei Bewegungen in radialer Richtung (den 'longitudinalen' Dopplereffekt) untersucht
- Transformation der Grössen der Wärmelehre. Wie man das angehen kann habe ich in der Aufgabe 11 von E6 angedeutet

Etlche Ergänzungen und Anregungen werden noch im Abschnitt K vorgestellt. Ich möchte jetzt den einmal gewonnenen Schwung beibehalten und gleich noch einen Einstieg in die Allgemeine Relativitätstheorie präsentieren. Dabei stütze ich mich weiterhin auf die Darstellung [10] von Epstein sowie auf das schöne, aber längst vergriffene Buch [26] von Horst Melcher, welches 1968 in der damaligen DDR erschienen ist und vielleicht deshalb im 'Westen' nicht die ihm gebührende Verbreitung erfahren hat.

## F7 Aufgaben und Anregungen

- Überlegen Sie sich selber, wie die folgenden Energie-Einheiten ineinander umgerechnet werden müssen: a) J b) MeV c) u d) kg
- Ein gewöhnliches Sauerstoffatom (also O-16) wiegt  $15.994915 \text{ u}$ , ein Wasserstoffatom (H-1) wiegt  $1.0078252 \text{ u}$ . Berechnen Sie daraus die mittlere Bindungsenergie eines Protons oder Neutrons im Sauerstoffkern und vergleichen Sie mit dem Diagramm auf Seite 90.
- Ein Teilchen der Ruhemasse  $m$  stosse inelastisch mit der kinetischen Energie  $4 \cdot m \cdot c^2$  gegen ein ruhendes Teilchen derselben Ruhemasse. Zeigen Sie rechnerisch, dass sie dabei zu einem einzigen Teilchen verschmelzen können, und berechnen Sie dessen Ruhemasse.
- Bei der Frontalkollision eines Elektrons mit einem Positron kann ein Psi-Teilchen entstehen, wenn das Elektron und das Positron vorher so stark beschleunigt worden sind, dass ihre Massen auf das 3700-fache der Ruhemasse angewachsen sind.
  - Bestimmen Sie die erforderliche kinetische Energie der Elektronen in MeV
  - Bestimmen Sie die Ruhemasse des erzeugten Psi-Teilchens
  - Wie schwer wäre also der Schrotthaufen, den zwei Kleinwagen der Ruhemasse  $500 \text{ kg}$  bilden, wenn sie mit denselben Geschwindigkeiten wie das Elektron und das Positron frontal zusammenstießen ?
- (anspruchsvolle Anschlussaufgabe an 4)  
Welche Energie in MeV müsste ein Positron mitbringen, damit beim Stoss gegen ein ruhendes Elektron ein Psi-Teilchen erzeugt werden könnte? Rechnen Sie nicht mit den Geschwindigkeiten, sondern mit den Energien und den Impulsen und verwenden Sie die Gleichung (2) auf p.78! Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Aufwand beim Einsatz eines Doppelspeicherrings wie in 4 !
- Zeigen Sie, dass man *nicht* den relativistischen Ausdruck für die kinetische Energie erhält, wenn man einfach in der Formel  $0.5 \cdot m \cdot v^2$  für  $m$  die dynamische Masse  $m_v$  einsetzt.
- Die Aufgabe bezieht sich auf die Illustration auf p. 94. Das Magnetfeld habe senkrecht zur Bildebene eine Stärke von  $0.214 \text{ Tesla}$ , und die beiden Bahnradien seien zu Beginn der spiralförmigen Bahnen mit  $r_1 = 8.31 \text{ cm}$  respektive  $r_2 = 5.17 \text{ cm}$  ausgemessen worden.
  - Berechnen Sie sowohl fürs Elektron als auch fürs Positron die Gesamtenergie und damit auch die dynamische Masse unmittelbar nach der Entstehung
  - Bestimmen Sie die kinetischen Energien und die Geschwindigkeiten, welche die beiden Teilchen nach ihrer Entstehung besaßen
  - Bestimmen Sie die Mindestenergie des erzeugenden  $\gamma$ -Quants und daraus mithilfe der Planck-Formel  $E = h \cdot f$  auch dessen Mindestfrequenz
  - Für Photonen gilt ja  $E = p \cdot c$ . Zeigen Sie, dass nicht der ganze Impuls des einfallenden Quants an die beiden entstandenen Teilchen weitergegeben worden ist, dass also noch ein weiteres Teilchen bei dieser Paarerzeugung mitgespielt haben muss
- Ein Röntgen-Quant der Energie  $100 \text{ keV}$  trifft auf ein ruhendes Elektron und wird von diesem absorbiert. Welche Geschwindigkeit erhält das Elektron dadurch ?
  - Bestimmen Sie die Lösung mit dem Impulserhaltungssatz
  - Welche Geschwindigkeit hätte das Elektron, wenn die gesamte Energie des Photons in kinetische Energie des Elektrons umgewandelt würde ?
  - Welcher Prozentsatz der einfallenden Energie wird also nicht in kinetische Energie umgesetzt ? Wohin geht denn dieser Anteil ?





The Crab Nebula in Taurus (VLT KUEYEN + FORS2)

ESO PR Photo 40f/99 ( 17 November 1999 )

© European Southern Observatory

## G Von der Speziellen zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Ausgehend von der rätselhaften Tatsache, dass sich die träge und die schwere Masse experimentell nicht unterscheiden lassen, lernen wir Einsteins Schlüssel zum Einbau der Gravitation in die Relativitätstheorie kennen: Das Äquivalenzprinzip. Dann klären wir genau, für welchen einfachen, aber sehr wichtigen Fall wir die quantitativen Auswirkungen beschreiben werden. Im vierten Abschnitt studieren wir, welchen Einfluss die Gravitation auf 'Uhren und Massstäbe' hat, so wie wir im Kapitel **B** den Einfluss einer Relativgeschwindigkeit auf das Ergebnis von Längen- und Zeitmessungen studiert haben. Im Fall relativ schwacher Gravitationsfelder können wir die korrekten Formeln herleiten. Dass diese allgemein gültig sind für nicht rotierende kugelförmige Massen, also für die Schwarzschild-Lösung der Einstein'schen Gleichungen, ist zwar richtig, aber wir können es nicht begründen. Aus unseren Formeln können wir weiter ableiten, wie sich Geschwindigkeiten transformieren zwischen Beobachtern, die 'unterschiedlich tief in ein Gravitationsfeld eingetaucht sind'. Dies führt zur Erkenntnis, dass für einen entfernten Beobachter die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum nicht mehr überall dieselbe ist!

## G1 Eine seltsame experimentelle Tatsache

Was ist schwerer - ein Kilogramm Blei oder ein Kilogramm Federn? [28-195f] Die Antwort auf diese vermeintliche Scherzfrage ist keineswegs selbstverständlich. Newton war vielleicht der erste, der sich darüber gewundert hat, dass sich die träge und die schwere Masse experimentell nicht unterscheiden lassen (siehe Zitat p.7 in A1). In einer Serie von Pendelversuchen ist er der Sache eigenhändig nachgegangen und hat festgestellt, dass die beiden Grössen einander proportional sind. Es ist aber nur eine Frage der Definition der Einheiten für die Masse und die Kraft, um aus der Proportionalität eine Gleichheit zu machen.

Im Abschnitt F1 haben wir auf p.84 fast beiläufig bemerkt, dass wir es im Prinzip sogar mit *drei* verschiedenen Konzepten von 'Masse' zu tun haben:

- Masse als 'träge Masse', welche einer Impulsänderung einen Widerstand entgegensetzt
- Masse als 'schwere Masse', auf die in einem Gravitationsfeld eine Kraft wirkt
- Masse als 'gravitierende Masse', welche selber ein Gravitationsfeld erzeugt

Dass die 'felderzeugende' Masse mit der 'felderleidenden' gleichgesetzt werden kann hat eigentlich nie Aufsehen erregt. Dass aber die *träge* und die *schwere* Masse identisch sein sollen hat keine logische Grundlage und wurde deshalb immer wieder experimentell getestet. Die Genauigkeit, die Newton mit seinen Pendelversuchen erzielte, lag etwa bei 1:1000. Wohl angestossen durch die Überlegungen von Ernst Mach hat der ungarische Baron Loránd von Eötvös ab 1899 Präzisionsexperimente zu dieser Frage ausgeführt. Er konnte dabei die Genauigkeit von Newton um viele Zehnerpotenzen übertreffen. Eine weitere deutliche Steigerung gelang dann 1964 Robert H. Dicke und seinem Team. Wegen der fundamentalen Bedeutung dieser Experimente sollen die Angaben dazu aus dem 'Telefonbuch' [27-1050ff (!)] in einer kleinen Tabelle zusammengestellt werden. Ich nehme auch noch den Fallturm in Bremen hinzu, da dort erstmals nicht mehr Torsionskräfte gemessen werden, sondern direkt geprüft wird, ob wirklich alle Körper gleich schnell fallen. Seit 2005 kann dabei dank der neuen Katapultanlage eine Freifallzeit von etwa 9.5 Sekunden erzielt werden. Der zugehörige Weblink ist [www.zarm.uni-bremen.de/index.htm](http://www.zarm.uni-bremen.de/index.htm).

wer	wann	wie genau
Newton	um 1680	1 : 10 <sup>3</sup>
Eötvös	1899 - 1922	5 : 10 <sup>9</sup>
Renner	1935	7 : 10 <sup>10</sup>
Dicke et al.	1964	1 : 10 <sup>11</sup>
Braginsky & Panov	1971	1 : 10 <sup>12</sup>
Fallturm in Bremen	1990 - heute	1 : 10 <sup>12</sup>

Misner et al. nennen dieses Faktum in [27] "the uniqueness of free fall" oder "the weak equivalence principle". Diese experimentelle Tatsache steht am Anfang jeder Theorie der Gravitation. Alle (kleinen) Testkörper fallen im Gravitationsfeld eines grossen Körpers genau gleich schnell, unabhängig von ihrer Zusammensetzung und ihrer Masse. Warum das so ist konnte Newton nicht beantworten und er wollte auch nicht darüber spekulieren ('hypotheses non fingo'). Eine gute Theorie der Gravitation muss aber auf diese Frage eine Antwort geben.

Ab 1906 hat Einstein an diesem Problem gearbeitet - und 1908 hat er erkannt, dass er es auf seine typische Art wohl am besten lösen kann.



[http://www.einsteinjahr-bremen.de/FallturmBremen\\_Einsteinv1\\_300605.jpg](http://www.einsteinjahr-bremen.de/FallturmBremen_Einsteinv1_300605.jpg)  
(der Link ist nicht mehr aktiv)

## G2 Das Äquivalenzprinzip

Was macht Einstein, wenn zu einem experimentellen Ergebnis keine logische Erklärung gefunden werden kann? Er macht das zu erklärende Faktum zum Ausgangspunkt einer neuen Theorie! Die unerklärliche Konstanz der Lichtgeschwindigkeit hat er (mit Rückendeckung von Maxwell) einfach zum Prinzip erhoben und darauf die SRT begründet. Genauso packt er auch die Gravitation an - er macht aus der Gleichheit der schweren und der trägen Masse ein Axiom und erklärt:

1. Es lässt sich prinzipiell mit lokalen Experimenten nicht feststellen, ob ein Labor im Gravitationsfeld einer grossen Masse ruht und dort die Fallbeschleunigung  $g$  gemessen wird oder ob es gravitationsfrei der konstanten Beschleunigung  $g$  ausgesetzt ist.

Dieses Äquivalenzprinzip von Einstein ist so wichtig, dass wir es noch auf verschiedene andere Arten formulieren wollen (nach [27] müssten wir es das 'starke Äquivalenzprinzip' nennen):

2. Es gibt keine lokalen Experimente, die unterscheiden können, ob ein Labor in einem Gravitationsfeld frei fällt oder ob es unbeschleunigt in einem gravitationsfreien Raum ruht.
3. In einem homogenen Gravitationsfeld laufen alle Vorgänge genau gleich ab wie in einem gleichförmig beschleunigten, aber gravitationsfreien Bezugssystem.
4. Ein kleines, in einem Gravitationsfeld frei fallendes und nicht rotierendes Labor ist ein Inertialsystem im Sinne der SRT.
5. Die Wirkung einer Schwerkraft kann lokal durch eine passende Beschleunigung erzeugt oder aufgehoben werden.

In der dritten Formulierung ist die Forderung, dass die Experimente 'lokal' sein sollen, sich also nicht über ein 'grosses' Raumgebiet erstrecken sollen, ersetzt durch die Forderung, dass das Gravitationsfeld 'homogen' sein soll, was natürlich in allen Fällen auch nur in einem kleinen Raumgebiet in sehr guter Näherung gilt. Die dritte Formulierung hat Einstein selber in seiner populären Darstellung [29] der Relativitätstheorien derart plastisch ausgemalt, dass man an eine bewusste Bezugnahme auf die Schilderung der Phänomene im Schiffsbauch durch Galilei (siehe Zitat in [A2](#)) denken muss:

“Wir denken uns ein geräumiges Stück leeren Weltraumes, so weit weg von Sternen und erheblichen Massen, dass wir mit hinreichender Genauigkeit den Fall vor uns haben, der im GALILEISCHEN Grundgesetz vorgesehen ist. Es ist dann möglich, für diesen Teil der Welt einen GALILEISCHEN Bezugskörper zu wählen, relativ zu welchem ruhende Punkte ruhend bleiben, bewegte dauernd in geradlinig gleichförmiger Bewegung verharren. Als Bezugskörper denken wir uns einen geräumigen Kasten von der Gestalt eines Zimmers; darin befindet sich ein mit Apparaten ausgestatteter Beobachter. Für diesen gibt es natürlich keine Schwere. Er muss sich mit Schnüren am Boden befestigen, wenn er nicht beim leisesten Stoss gegen den Boden langsam gegen die Decke des Zimmers entschweben will.

In der Mitte der Kastendecke sei aussen ein Haken mit Seil befestigt und an diesem fange nun ein Wesen von uns gleichgültiger Art mit konstanter Kraft zu ziehen an. Dann beginnt der Kasten samt dem Beobachter in gleichförmig beschleunigtem Fluge nach "oben" zu fliegen. Seine Geschwindigkeit wird im Laufe der Zeit ins Phantastische zunehmen - falls wir all dies beurteilen von einem anderen Bezugskörper aus, an dem nicht mit einem Stricke gezogen wird.

Wie beurteilt aber der Mann im Kasten den Vorgang? Die Beschleunigung des Kastens wird vom Boden desselben durch Gegendruck auf ihn übertragen. Er muss also diesen Druck mittels seiner Beine aufnehmen, wenn er nicht seiner ganzen Länge nach den Boden berühren will. Er steht dann im Kasten genau wie einer in einem Zimmer eines Hauses auf unserer Erde steht. Lässt er einen Körper los, den er vorher in der Hand hatte, so wird auf diesen die Beschleunigung des Kastens nicht mehr übertragen; der Körper wird sich daher in beschleunigter Relativbewegung dem Boden des Kastens nähern. Der Beobachter wird sich ferner überzeugen, dass die Beschleunigung des Körpers gegen den Boden immer gleich gross ist, mit was für einem Körper er auch den Versuch ausführen mag.

Der Mann im Kasten wird also, gestützt auf seine Kenntnisse vom Schwerefeld ... zum Ergebnis kommen, dass er samt dem Kasten sich in einem ziemlich konstanten Schwerefeld befinde. Er wird allerdings einen Augenblick verwundert sein darüber, dass der Kasten in diesem Schwerefeld nicht falle. Da entdeckt er aber den Haken in der Mitte der Decke und das an demselben befestigte gespannte Seil, und er kommt folgerichtig zum Ergebnis, dass der Kasten im Schwerefeld ruhend aufgehängt sei.

Dürfen wir über den Mann lächeln und sagen, er befinde sich mit seiner Auffassung im Irrtum? Ich glaube, wir dürfen das nicht, wenn wir konsequent bleiben wollen, sondern wir müssen zugeben, dass seine Auffassungsweise weder gegen die Vernunft noch gegen die bekannten mechanischen Gesetze verstösst. Wir können den Kasten, wenn er auch gegen den zuerst betrachteten "GALILEISCHEN RAUM" beschleunigt ist, dennoch als ruhend ansehen. Wir haben also guten Grund, das Relativitätsprinzip auszudehnen auf relativ zueinander beschleunigte Bezugskörper und haben so ein kräftiges Argument für ein verallgemeinertes Relativitätspostulat gewonnen.

Man beachte wohl, dass die Möglichkeit dieser Auffassungsweise auf der fundamentalen Eigenschaft des Schwerefeldes beruht, allen Körpern dieselbe Beschleunigung zu erteilen, oder, was dasselbe bedeutet, auf dem Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse. Würde dieses Naturgesetz nicht bestehen, so würde der Mann im beschleunigten Kasten das Verhalten der Körper seiner Umgebung nicht durch die Voraussetzung eines Gravitationsfeldes deuten können, und er wäre auf *Grund* keiner Erfahrung berechtigt, seinen Bezugskörper als einen "ruhenden" vorzusetzen.

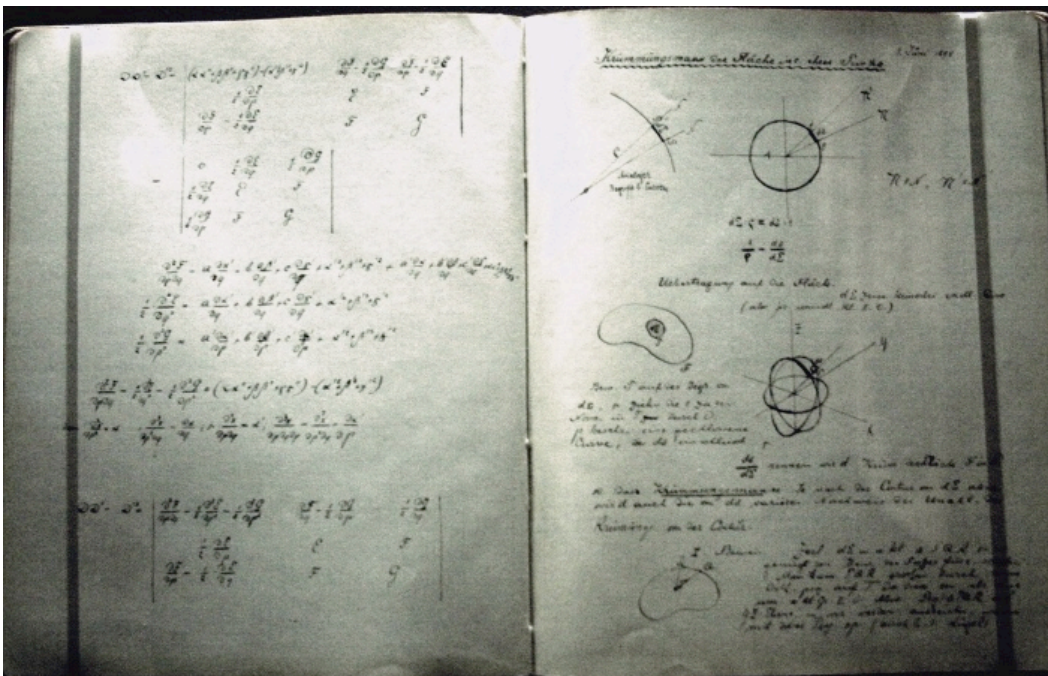
Der Mann im Kasten befestigte an der Innenseite der Kastendecke ein Seil und an dessen freiem Ende einen Körper. Durch diesen wird bewirkt werden, dass das Seil in gespanntem Zustande "vertikal" herabhängt. Wir fragen nach der Ursache der Spannung des Seils. Der Mann im Kasten wird sagen: "Der aufgehängte Körper erfährt in dem Schwerefeld eine Kraft nach unten, welcher durch die Seilspannung das Gleichgewicht gehalten wird; massgebend für die Grösse der Seilspannung ist die *schwere* Masse des aufgehängten Körpers." Andererseits wird aber ein Be[obachter], der frei im Raum schwebt, den Zustand so beurteilen: "Das Seil ist gezwungen, die beschleunigte Bewegung des Kastens mitzumachen und überträgt diese auf den daran befestigten Körper. Die Seilspannung ist so gross, dass sie die Beschleunigung des letzteren gerade zu bewirken vermag. Massgebend für die Grösse der Spannung im Seile ist die *träge* Masse des Körpers." Wir sehen aus diesem Beispiele, dass unsere Erweiterung des Relativitätsprinzips den Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse als *notwendig* erscheinen lässt. Damit ist eine physikalische Interpretation dieses Satzes gewonnen." [29-43ff]

Vielleicht kann ich Sie mit diesem langen Zitat dazu anstiften, es selber mal mit einem der allgemein verständlichen Texte von Einstein zu versuchen. Natürlich gibt es auch viele Zeichnungen, Animationen, Videos und DVD's, welche diese Schilderung all denjenigen vor Augen führen, die sich diese Bilder bei der Lektüre nicht selber machen mögen. Sie sind alle nett oder gar lustig, schauen Sie sich ruhig einige davon an. Es ist amüsant, Professor Albert dabei zuzuschauen, wie er gemütlich samt Lift im freien Fall den Liftschacht hinuntersaust. Mich selber interessiert der Fallturm in Bremen, wo man sowas für einige Sekunden experimentell tatsächlich durchführen kann, viel mehr als diese Comiczeichnungen zu einem *Gedankenexperiment*.

### G3 Unsere Beschränkung auf einen wichtigen Spezialfall

Das (starke) Äquivalenzprinzip war für Einstein Ansatzpunkt und Nagelprobe für jede mathematische Formulierung einer Theorie der Gravitation. Dennoch kam er bis 1911 kaum richtig voran. 1912 kehrte er von Prag nach Zürich zurück und muss dort zu seinem Freund und Studienkollegen Marcel Grossmann, der inzwischen eine Professur an der ETH innehatte, gesagt haben: "Grossmann, Du musst mir helfen, sonst werd' ich verrückt." [7-213] Grossmann konnte ihm schnell helfen, und Einstein hat Mathe gebüffelt wie früher und später nie mehr. Schon bald fanden sie die richtigen Feldgleichungen - verwarfen sie aber wieder, weil sie meinten, dass sich in erster Näherung nicht die Newton'sche Theorie daraus ergäbe. Im Sommer 1915 (Einstein war schon über ein Jahr in Berlin) stellte Einstein seine ganzen Überlegungen und den Stand seiner Arbeiten in Göttingen David Hilbert und seinen Leuten vor. Am 4. November 1915 legte er der Preussischen Akademie eine weitere Abhandlung vor aus der Serie "Zur Allgemeinen Relativitätstheorie". Eine Woche später musste er davon aber schon wieder einiges zurücknehmen. Am 25. November publizierte er schliesslich die endgültige Fassung seiner Gleichungen. Nun hat aber Hilbert schon am 20. November eine Arbeit zur Gravitation eingereicht, die allerdings erst am 31. März 1916 gedruckt erschien und ebenfalls die korrekten Gleichungen enthielt. Beinahe wäre es darüber noch zu einem unschönen Prioritätsstreit gekommen. Einige Unverbesserliche versuchen, diesen heute immer noch anzufachen, dabei weiss man seit 1997 definitiv, dass der Plagiatsvorwurf nur Hilbert treffen kann (siehe dazu [31-105ff]).

In einem Brief an Arnold Sommerfeld schrieb Einstein: "Denk Dir meine Freude ... , dass die Gleichungen die Perihel-Bewegung des Merkur richtig liefern!" Und an den Freund Paul Ehrenfest: "Ich war einige Tage fassungslos vor freudiger Erregung." Einstein war aber auch völlig erschöpft und musste sich einige Wochen pflegen lassen.



Vorlesungs-Skript zur Differentialgeometrie von Marcel Grossmann. Einstein schwänzte die Mathematik-Vorlesungen häufig und war für die Prüfungsvorbereitungen auf die (wunderschönen) Mitschriften seines Freundes angewiesen

Einstein schreibt in seiner Abhandlung: "Dem Zauber dieser Theorie wird sich kaum jemand entziehen können, der sie wirklich erfasst hat; sie bedeutet einen wahren Triumph der durch Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci und Levi-Civita begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls." Diese Begeisterung Einsteins und einiger weiterer 'Eingeweihten' können die meisten Leute (der Autor dieses Buches inbegriffen) nicht so richtig teilen, weil sie die verwendeten mathematischen 'Tools' nicht beherrschen. Zwar schrieb schon Galilei, dass das Buch der Natur in der Sprache der Mathematik geschrieben sei - aber die von der Einstein'schen Theorie geforderten Kenntnisse sind für die meisten Menschen eine Zumutung. A. Hermann schreibt dazu in seiner lesenswerten Einstein-Biographie:

Das machte manchen Zeitgenossen zornig. Der Arzt und Schriftsteller Alfred Döblin sagte: Kopernikus, Kepler und Galilei könne er begreifen, die neue Theorie aber, die "abscheuliche Relativitätslehre", schliesse ihn "und die ungeheure Menge aller Menschen, auch der denkenden, auch der gebildeten, von ihrer Erkenntnis aus". Die Naturwissenschaftler von heute mit Einstein an der Spitze hätten sich zu einer "Bruderschaft" entwickelt, die sich "freimaurerischer Zeichen und beinahe einer spiritistischen Klopfsprache bedient". [30-220]

Wie bei der SRT haben aber auch bei der ART (Allgemeine Relativitätstheorie) im Laufe der Jahrzehnte verschiedene Leute für gebildete Laien das Tor zu einem qualitativen Verständnis weit geöffnet. Unterdessen ist es soweit, dass wir im wichtigsten Spezialfall die auftretenden Effekte auch quantitativ korrekt berechnen können, ohne dass wir dafür zuerst, im Anschluss an ein Grundstudium, noch einige Semester höhere Mathematik studieren müssen. Für mich waren die beiden bereits erwähnten Bücher [10] und [26] dabei am wichtigsten.



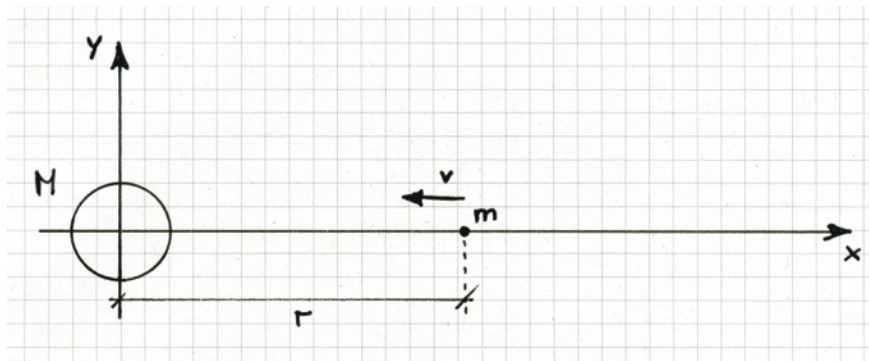
Marcel Grossmann, Albert Einstein, Gustav Geissler und Marcells Bruder Eugen während ihrer Zeit als Studenten an der ETH

**Unsere Einschränkung:**

**Wir berechnen nur den Einfluss einer einzigen, kugelförmigen, nicht rotierenden Masse, welche an ihrer Oberfläche ein nicht allzu starkes Gravitationsfeld aufweist. Wir behandeln also nur den Fall eines kugelsymmetrischen schwachen Gravitationsfeldes. Schwach heisst dabei: Die Fluchtgeschwindigkeit von der Oberfläche der felderzeugenden Kugel soll viel kleiner sein als die Lichtgeschwindigkeit.**

Damit gilt für einen Kasten, der aus grossem Abstand frei zur Oberfläche dieser Kugel fällt, die ganze Zeit in sehr guter Näherung  $E_{kin} = 0.5 \cdot m_0 \cdot v^2$ . Im Diagramm auf p.77 im Abschnitt E4 sehen wir, dass das noch angeht bis etwa  $v = c/3$ . Die Fluchtgeschwindigkeit von der Erde beträgt aber lediglich 11.2 km/s, bei der Sonne sind es 618 km/s !! Diese Zahlen liegen *weit* unter unserer Obergrenze von  $c/3 = 100'000$  km/s, bei der die noch abzuleitenden Formeln unbrauchbar werden. Fast überall im Weltall ausser in der Nähe von ganz exotischen Objekten wie Neutronensternen oder Schwarzen Löchern sind unsere Zusatzbedingungen extrem gut erfüllt. Ganz besonders gilt das für jeden Ort im gravitativen 'Einzugsgebiet' unserer Sonne.

Lassen wir nun also ein kleines Labor von sehr weit weg entlang der x-Achse gegen das Zentrum einer kugelförmigen Masse M fallen:



Das kleine Labor soll am Anfang der Betrachtung gerade diejenige kleine Anfangsgeschwindigkeit haben, für die gilt

$$0.5 \cdot m \cdot v^2 = E_{kin} = -E_{pot} = G \cdot M \cdot m / r$$

Wegen des Energieerhaltungssatzes ist diese Gleichung während des Fallens auch in jedem späteren Zeitpunkt für immer kleinere Werte von r und immer grössere Werte von v erfüllt. Nach der Division durch m erhalten wir

$$v^2 = 2 \cdot G \cdot M / r = -2 \cdot \Phi(r) \quad \text{und} \quad v^2/c^2 = 2 \cdot G \cdot M / (c^2 \cdot r) = -2 \cdot \Phi(r) / c^2 = 2 \cdot \alpha / r = R_s / r$$

mit den Definitionen  $\Phi(r) = -G \cdot M / r$ ,  $\alpha = G \cdot M / c^2$  und  $R_s = 2 \cdot G \cdot M / c^2$ .  $\Phi(r)$  ist der klassische Ausdruck für das Potential im Newton'schen Gravitationsfeld,  $R_s$  ist der sogenannte Schwarzschild-Radius. Für unseren alles bestimmenden Wurzelausdruck erhalten wir somit

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot r}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} = \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{r}} = \sqrt{1 + \frac{2 \cdot \phi(r)}{c^2}}$$

Nun ist aber nach unserer zusätzlichen Voraussetzung der Wert von  $v^2/c^2$  und damit auch derjenige von  $2 \cdot \alpha / r$  sehr klein. Das Quadrat von  $\alpha / r$  ist daher noch viel kleiner, was die folgende Umformung gestattet:

$$\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{r}} \approx \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{r} + \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2} = 1 - \frac{\alpha}{r}$$

Damit und wegen  $\Phi(r) = -(\alpha / r) \cdot c^2$  können wir unsere Wurzel etwas vereinfachen:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{r}} \approx \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) = \left(1 + \frac{\Phi(r)}{c^2}\right)$$

Wir wollen uns nochmals vergewissern, dass diese Näherung sehr, sehr gut ist: Die grösste Gravitationsfeldstärke tritt im Sonnensystem an der Oberfläche der Sonne auf. Prüfen Sie nach, dass dort der Wert von  $\alpha / r$  etwa  $2.1 \cdot 10^{-6}$  beträgt! Wir haben oben das Quadrat von diesem Ausdruck in die Rechnung geschmuggelt, also etwas im Bereich von  $4 \cdot 10^{-12}$ ! Dieses Glied ist eine Million mal kleiner als der bedeutsame Term  $2 \cdot \alpha / r$ .

Setzen wir auch noch unseren Definitionen von  $R_s$ ,  $\alpha$  und  $\Phi(r)$  ein Denkmal:

$$\alpha = \frac{G \cdot M}{c^2}$$

$$R_s = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2} = 2 \cdot \alpha$$

$$\Phi(r) = -\frac{G \cdot M}{r}$$

Damit sind wir vorbereitet darauf, in unserem wichtigen Spezialfall die Konsequenzen aus dem Äquivalenzprinzip zu ziehen und herzuleiten, wie ein Gravitationsfeld den Gang von Uhren und die Länge von Massstäben beeinflusst.

Zum Schluss wollen wir nochmals daran erinnern, welche zusätzliche Annahme wir bei der Herleitung dieser Formeln gemacht haben. Wir können das jetzt auf verschiedene Arten formulieren:

- die beim freien Fall aus der Ruhe möglichen Geschwindigkeiten sollen *viel* kleiner sein als  $c$
- die beim freien Fall aus der Ruhelage erzielbare kinetische Energie soll immer *viel* kleiner sein als die Ruheenergie  $m \cdot c^2$
- der Betrag  $m \cdot \Phi(r)$  der potentiellen Energie soll immer *viel* kleiner sein als die Ruheenergie  $m \cdot c^2$
- der Kugelradius der Zentralmasse  $M$  soll *viel* grösser sein als deren Schwarzschildradius, sodass der Term  $R_s / r$  ausserhalb der Kugel überall *viel* kleiner als 1 ist

Es muss sowieso noch betont werden, dass die oben hergeleiteten Formeln nur im *Äussern* der Kugel gültig sind. Im Innern derselben nimmt die Gravitationsfeldstärke ja wieder ab und ist im Zentrum - allein schon aus Symmetriegründen - null. Diese Abnahme ist nach Newton übrigens linear. Wir werden in **H5** noch darauf zurückkommen.

## G4 Uhren und Massstäbe im Schwarzschild-Feld



In unserem Sinne *schwache* Gravitationsfelder werden oft auch Schwarzschild-Felder genannt zu Ehren des deutschen Physikers und Astronomen Karl Schwarzschild (1873-1916). Dieser beschäftigte sich bereits um die Jahrhundertwende mit der Frage, ob der physikalische Raum der Astronomie wirklich euklidisch sei oder nicht, und schon 1913 begann er nach der von Einstein vorhergesagten Rotverschiebung von Spektrallinien im Spektrum der Sonne zu suchen. Wenige Wochen nach der Publikation von Einsteins Gleichungen präsentierte er als erster eine exakte Lösung derselben, und einige Wochen später reichte er bereits eine zweite nach.

Diese Arbeiten verfasste er während seines Kriegsdienstes an der Ostfront. Dort zog er sich auch eine Hautkrankheit zu, an der er noch 1916 starb.

Lassen wir also wieder unser kleines Labor genau wie im letzten Abschnitt aus dem 'OFF' einer kugelförmigen Masse entgegenfallen. Wir überlegen uns, wie sich die Messwerte eines Beobachters in diesem Labor zu denjenigen eines unbewegten Beobachters im OFF verhalten, also zu denjenigen eines von  $M$  (und allen anderen grossen Massen) sehr weit entfernten und relativ zu  $M$  ruhenden Beobachters.

Nach dem Äquivalenzprinzip ist das frei fallende Labor in jedem Moment ein gravitationsfreies Inertialsystem im Sinne der SRT. Damit wissen wir aber schon, in welcher Beziehung die Messungen im fallenden Labor im Abstand  $r$  vom Zentrum von  $M$  zu denjenigen des Beobachters im OFF stehen:  $r$  legt ja zusammen mit  $\alpha$  (oder  $R_S$  oder  $\Phi$ ) den Wert unseres Wurzelausdrucks fest:

$$\Delta t(r) = \Delta t(\infty) \cdot \sqrt{\phantom{x}} = \Delta t(\infty) \cdot \sqrt{1 - R_S / r} \approx \Delta t(\infty) \cdot (1 - \alpha / r) = \Delta t(\infty) \cdot (1 + \Phi(r) / c^2)$$

$$\Delta x(r) = \Delta x(\infty) / \sqrt{\phantom{x}} = \Delta x(\infty) / \sqrt{1 - R_S / r} \approx \Delta x(\infty) / (1 - \alpha / r) = \Delta x(\infty) / (1 + \Phi(r) / c^2)$$

$$\Delta y(r) = \Delta y(\infty) \quad (\text{keine seitliche Kontraktion})$$

$$\Delta z(r) = \Delta z(\infty) \quad (\text{keine seitliche Kontraktion})$$

Diese Ergebnisse erhalten wir aus der SRT und unserer vierten Formulierung des Äquivalenzprinzips. Mit dem freien Fall haben wir die Gravitation vollständig verschwinden lassen, wir haben sie für den Beobachter im OFF durch eine in jedem Moment gerade angepasste Beschleunigung ersetzt. Die Insassen im frei fallenden Labor befinden sich also die ganze Zeit in einem Inertialsystem. Sie müssen also z.B. im Spektrum des angeregten Wasserstoffs immer dieselben Wellenlängen messen. Nun sollen sie mit der Momentangeschwindigkeit  $v = \sqrt{2 \cdot G \cdot M / r}$  am Ort  $r$  vorbeifliegen. Dabei sollen sie die Frequenzen im Spektrum von *dort ruhendem*, leuchtendem Wasserstoffgas messen. Nach Berücksichtigung des Dopplereffektes (die Laborinsassen kennen die SRT) müssen sie in ihrem Laborsystem, da sie sich ja in einem Inertialsystem befinden, die üblichen bekannten Werte erhalten. Am Ort  $r$  im Gravitationsfeld ruhendes Wasserstoffgas strahlt also mit Frequenzen, die mit den aus dem OFF gesehen *zu langsam laufenden Uhren* des frei fallenden Labors gerade richtig bestimmt werden !! Das bedeutet aber, dass ruhende Uhren oder andere schwingungsfähige Systeme im Abstand  $r$  vom Gravitationszentrum genau um denselben Faktor langsamer gehen (im Vergleich mit solchen im OFF) wie diejenigen in unserem fallenden Labor.

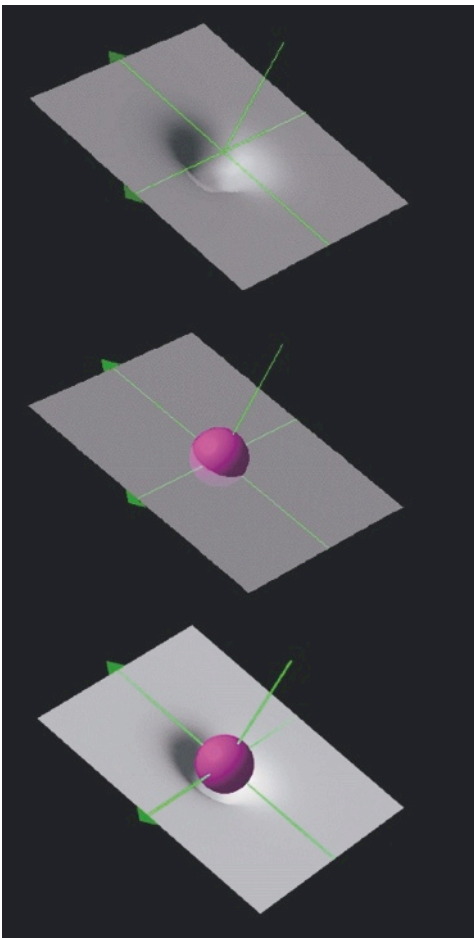
Wir gelangen damit zur folgenden Formulierung des Äquivalenzprinzips, die nicht mehr allgemein gilt, sondern auf unsere spezielle Situation zugeschnitten ist:

**Messungen von Längen und Zeitintervallen, die in einem kleinen, ruhenden Labor am Ort  $r$  im Gravitationsfeld von  $M$  vorgenommen werden, transformieren sich gleich wie diejenigen unseres frei fallenden Labors, wenn dieses entlang einer Feldlinie am Ort  $r$  vorbeifällt.**

Betrachten wir die Gleichungen auf p.107 und p.108, so können wir aus ihnen die folgenden qualitativen Aussagen ableiten:

1. Je kleiner  $r$  ist, desto weniger Zeit verstreicht dort im Vergleich zu einer Uhr im OFF. Je stärker das Gravitationsfeld ist, desto langsamer gehen die Uhren! Uhren, die im gleichen Abstand vom Zentrum von  $M$  ruhen, laufen gleich schnell.
2. Je kleiner  $r$  ist, desto länger ist dort eine Strecke in radialer Richtung, wenn sie mit lokalen Massstäben gemessen wird. Aus dem OFF gesagt: Masstäbe verkürzen sich in radialer Richtung mit zunehmender Stärke des Gravitationsfeldes! Für die Dicke einer Kugelschale um  $M$  werden also lokale Geometer einen grösseren Wert bestimmen als ein Beobachter im OFF.
3. Der Umfang eines Kreises um den Mittelpunkt von  $M$  wird aber von lokalen Beobachtern gleich gross gemessen wie von einem Beobachter aus dem OFF.

Der zweite und der dritte Punkt bedeuten zusammengenommen, dass für einen Beobachter im Gravitationsfeld der Durchmesser eines Kreises länger ist als sein Umfang, dividiert durch  $\pi$  ! Die Gesetze der euklidischen Geometrie gelten also in einem Gravitationsfeld nicht mehr. Dass der Kreisdurchmesser länger ist als nach der euklidischen Erwartung, wenn er mit lokalen Massstäben und nicht aus dem OFF bestimmt wird, wird meist folgendermassen illustriert:



Es wird eine Delle gezeichnet, die wirklich die Eigenschaft hat, dass der Durchmesser, entlang der grauen Fläche gemessen, länger ist als der Kreisumfang geteilt durch  $\pi$  . Gern lässt man in dieser Delle dann noch als Planet ein Kügelchen kreisen, als ob es da ein Oben oder Unten und ein zusätzliches Gravitationsfeld in  $z$ -Richtung gäbe!

Epstein schimpft schwer über diese "zutiefst irreführende Darstellung" [10-205]. Er hat natürlich Recht. Mit dieser Delle will man nur die *Metrik in der Äquatorebene* durch den Stern darstellen. Die Massstäbe liegen immer *in* dieser Äquatorebene, sie werden aber kürzer, wenn man sich der Oberfläche des Sterns nähert (und haben im Mittelpunkt des Sterns wieder die gleiche Länge wie im OFF).

Um diese Verzerrung gegenüber der euklidischen Metrik darzustellen, dehnt man diese Äquatorebene in einen 'Hyperraum' - ob man eine Delle nach 'unten' oder eine Beule nach 'oben' zeichnet ist dabei belanglos. Diese zusätzliche zeichnerische Dimension hat mit der  $z$ -Richtung nichts zu tun. Der Wendepunkt des Querschnitts dieser Delle hat von der  $z$ -Achse den Abstand  $R$ , wenn  $R$  der aus dem OFF gemessene Radius des Sternes ist.

Wir sitzen im Folgenden meistens neben einem Beobachter im OFF, also sehr weit weg von der Masse M, an einem Ort, wo das Potential  $\Phi(r)$  praktisch verschwindet. Diese leicht fiktive Position hilft uns, wenn wir die Messwerte von einem Labor im Abstand  $r_1$  in diejenigen eines Labors im Abstand  $r_2$  vom Massenzentrum transformieren wollen. Stellen Sie sich zum Beispiel ein Blinklicht vor, das am Ort  $r_1$  mit konstanter Frequenz aufleuchtet. Welches Zeitintervall misst ein lokaler Beobachter am Ort  $r_2$  mit seiner Uhr, bis er 100 Lichtblitze gezählt hat ?

Es gilt nach p.108  $\Delta t(r_1) / \sqrt{1 - R_S / r_1} = \Delta t(\infty) = \Delta t(r_2) / \sqrt{1 - R_S / r_2}$  und damit  $\Delta t(r_2) = \Delta t(r_1) \cdot \sqrt{1 - R_S / r_2} / \sqrt{1 - R_S / r_1} = \Delta t(r_1) \cdot \sqrt{(1 - R_S / r_2) / (1 - R_S / r_1)}$

Entsprechend gilt für kleine Längen in radialer Richtung (also in x-Richtung)

$\Delta x(r_2) \cdot \sqrt{1 - R_S / r_2} = \Delta x(\infty) = \Delta x(r_1) \cdot \sqrt{1 - R_S / r_1}$  etc.

(Kleine) Strecken quer zu den Feldlinien sind hingegen für alle Beobachter gleich lang.

Wir werden meistens mit unseren Näherungen rechnen:

$\Delta t(r_2) / (1 - \alpha / r_2) \approx \Delta t(\infty) \approx \Delta t(r_1) / (1 - \alpha / r_1)$

$\Delta x(r_2) \cdot (1 - \alpha / r_2) \approx \Delta x(\infty) \approx \Delta x(r_1) \cdot (1 - \alpha / r_1)$

oder

$\Delta t(r_2) / (1 + \Phi(r_2) / c^2) \approx \Delta t(\infty) \approx \Delta t(r_1) / (1 + \Phi(r_1) / c^2)$

$\Delta x(r_2) \cdot (1 + \Phi(r_2) / c^2) \approx \Delta x(\infty) \approx \Delta x(r_1) \cdot (1 + \Phi(r_1) / c^2)$

Damit wissen wir genau Bescheid darüber, wie die ortsabhängigen Messwerte von Zeitintervallen und Längen transformiert werden müssen. Gönnen wir uns jetzt zur Belohnung eine kleine Rechnung: Eine Uhr soll oben auf einem 22.6 m hohen Turm in jeder Sekunde genau einen Piepser aussenden. Eine baugleiche Uhr soll unten am Fuss des Turmes stehen und die Zeit zwischen dem Eintreffen der Piepser messen. Wir wissen schon, dass die untere Uhr etwas langsamer geht. Welchen zeitlichen Abstand zwischen den Piepsern misst die untere Uhr?

Für das Verhältnis  $\Delta t(\text{oben})/\Delta t(\text{unten})$  erhalten wir aus den obigen exakten Formeln den Ausdruck  $\sqrt{(1 - 2 \cdot \alpha_E / (r_E + 22.6)) / (1 - 2 \cdot \alpha_E / r_E)}$  mit  $\alpha_E \approx 4.43 \cdot 10^{-3}$  m und  $r_E \approx 6.373 \cdot 10^6$  m

Gibt man diese Zahlen ein, so zeigen die meisten Taschenrechnern einfach 1 ! Die beiden Werte unterscheiden sich zu wenig, als dass man bei 10 oder 12 Stellen noch einen Unterschied zu 1 sehen könnte! Die Unterschiede sind also für kleine Verschiebungen im Gravitationsfeld der Erde derart klein, dass es an ein Wunder grenzt, dass man sie schon 1960 messen konnte (Experiment von Pound und Rebka, siehe 14 ). Damit wir die Grösse des Effekts berechnen können, sollten wir also nicht das Verhältnis  $\Delta t(\text{oben}) / \Delta t(\text{unten})$  bilden, sondern die winzige Differenz dieser beiden Zeiten ins Verhältnis zu einer der Zeiten selber setzen. Wir müssten dann etwas erhalten, das kleiner ist als  $10^{-12}$ .

Bestimmen wir also  $(\Delta t(\text{oben}) - \Delta t(\text{unten})) / \Delta t(\text{unten}) = (\Delta t(r_2) - \Delta t(r_1)) / \Delta t(r_1)$

Es empfiehlt sich, dabei die Näherungsformeln ohne die Wurzeln zu benutzen:

$$\frac{\Delta t(r_2) - \Delta t(r_1)}{\Delta t(r_1)} \approx \frac{\Delta t(\infty) \cdot (1 - \alpha / r_2) - \Delta t(\infty) \cdot (1 - \alpha / r_1)}{\Delta t(\infty) \cdot (1 - \alpha / r_1)} = \frac{\alpha / r_1 - \alpha / r_2}{(1 - \alpha / r_1)} = \alpha \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot r_1} \cdot \frac{r_1}{r_1 - \alpha} = \alpha \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot (r_1 - \alpha)}$$

Schreiben wir für die Differenz  $(r_2 - r_1)$  einfach  $\Delta h$  und bedenken wir zudem, dass wir das Resultat nur im Subpromillebereich verändern, wenn wir für  $r_2 \cdot (r_1 - \alpha)$  einfach  $r_E^2$  schreiben, so erhalten wir das sehr einfache Ergebnis

$$\frac{\Delta t(r_2) - \Delta t(r_1)}{\Delta t(r_1)} \approx \alpha \cdot \frac{\Delta h}{r_E^2} \approx 2.47 \cdot 10^{-15}$$

Der Effekt ist also von der Grössenordnung  $1 : 10^{15}$  und es ist daher ganz in Ordnung, dass wir ihn vorher in den ersten 12 Nachkommastellen nicht gefunden haben.

In noch vertrautere Gefilde kommen wir, wenn wir dieselbe Rechnung mit der Potential-Darstellung durchführen. Wir erhalten (ausgehend von der Näherungsschreibweise ohne Wurzel) genau wie vorher schnell den ersten der Terme in der folgenden Zeile:

$$\frac{\phi(r_2) - \phi(r_1)}{c^2 + \phi(r_1)} \approx \frac{\phi(r_2) - \phi(r_1)}{c^2} \approx \frac{g \cdot \Delta h}{c^2}$$

Die erste Vereinfachung basiert dann auf unserer Zusatzvoraussetzung, die ja im Gravitationsfeld der Erde extrem gut erfüllt ist:  $\Phi(r)$  ist überall *viel* kleiner als  $c^2$  und kann deshalb als Summand im Nenner ohne weiteres weggelassen werden. Und bei der kleinen Höhendifferenz von 22.6 m an der Erdoberfläche können wir für die Potentialdifferenz im Zähler in guter Näherung  $g \cdot \Delta h$  einsetzen! Auf die Eingabe von  $9.81 \cdot 22.6 / 9 \cdot 10^{16}$  reagiert der Rechner auch brav mit dem Ergebnis  $2.46 \cdot 10^{-15}$ .

Damit haben wir bereits einen berühmten Test der ART quantitativ gemeistert. Die eigentliche Kunst besteht hier oft darin, das Problem erstens so zu formulieren, dass es eine bequeme Rechnung gestattet, und zweitens in dieser Rechnung geschickte Näherungen zu verwenden, damit das Resultat numerisch überhaupt bestimmt werden kann. Weitere Beispiele werden folgen.

Keine Berührungsängste:

Montag, 26. Oktober 1931  
 "Was der Arbeiter von der  
 Relativitätstheorie wissen muss"  
 Prof. Albert Einstein  
 Beginn 8 Uhr, Saaleinlass 7 Uhr

Beachten Sie auch den leicht  
 verdeckten Text ganz unten rechts !



## G5 Verschiedene Lichtgeschwindigkeiten ?!

Wer Längen und Zeiten messen kann, der kann auch Geschwindigkeiten messen. Kümmern wir uns also darum, wie die entsprechenden Messwerte eines im Abstand  $r$  vom Zentrum unserer kugelförmigen Masse ruhenden Beobachters für einen Beobachter im OFF zu transformieren sind.

Es ist klar, dass wir wie in der SRT unterscheiden müssen, ob eine Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung, also längs der Feldlinien, betrachtet wird oder eine in  $y$ -Richtung, d.h. senkrecht zu den Feldlinien. Die gemessenen Zeitintervalle transformieren sich ja richtungsunabhängig, während die Transformation der Laufstrecke richtungsabhängig ist. Zur Notation:  $v_y(r;r)$  bezeichne die Geschwindigkeit eines Objekts, welches sich im Abstand  $r$  vom Zentrum von  $M$  in  $y$ -Richtung bewegt, wie sie in einem am Ort  $r$  ruhenden Labor gemessen wird.  $v_y(r;\infty)$  soll die Geschwindigkeit bezeichnen, die ein Beobachter im OFF an demselben Objekt bei derselben Bewegung misst. Wir rechnen:

$$v_y(r;r) = \Delta y(r)/\Delta t(r) = \Delta y(\infty)/(\Delta t(\infty) \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \alpha/r}) = (\Delta y(\infty)/\Delta t(\infty)) / \sqrt{1 - 2 \cdot \alpha/r} = v_y(r;\infty) / \sqrt{1 - 2 \cdot \alpha/r}$$

$$\text{also } v_y(r;\infty) = v_y(r;r) \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \alpha/r} = v_y(r;r) \cdot \sqrt{1 - R_S/r} = v_y(r;r) \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \Phi(r) / c^2}$$

Es ist also genau wie in der SRT: Eine von Rot lokal gemessene Quergeschwindigkeit  $u_y'$  präsentiert sich Schwarz um den Wurzelterm verlangsamt:  $u_y = u_y' \cdot \sqrt{\quad}$  (siehe p.60 in **D5**)

Benutzen wir die Näherungen von p.107 für  $\sqrt{1 - 2 \cdot \alpha/r}$ , so erhalten wir den einfacheren Ausdruck  $v_y(r;\infty) \approx v_y(r;r) \cdot (1 - \alpha/r) = v_y(r;r) \cdot (1 + \Phi(r) / c^2)$

Dieselbe Rechnung für Geschwindigkeiten in  $x$ -Richtung liefert ein anderes Resultat:

$$v_x(r;r) = \Delta x(r)/\Delta t(r) = (\Delta x(\infty)/\sqrt{1 - R_S/r}) / (\Delta t(\infty) \cdot \sqrt{1 - R_S/r}) = (\Delta x(\infty)/\Delta t(\infty)) / (1 - R_S/r) = v_x(r;\infty) / (1 - R_S/r)$$

$$\text{also } v_x(r;\infty) = v_x(r;r) \cdot (1 - R_S/r) = v_x(r;r) \cdot (1 - 2 \cdot \alpha/r) = v_x(r;r) \cdot (1 + 2 \cdot \Phi(r)/c^2)$$

Hier tritt unser Wurzelfaktor im Quadrat auf und die Wurzel entfällt damit! Deshalb brauchen wir in diesem Fall auch nicht mit Näherungen zu arbeiten.

Elementare, aber etwas umständliche Rechnungen [26-135f] liefern eine *Näherungsformel*, welche für alle Bewegungsrichtungen taugt. Darin bezeichnet  $\vartheta$  den Winkel zwischen  $v$  und den Feldlinien:

$$v(r;\infty;\vartheta) \approx v(r;r;\vartheta) \cdot (1 - \alpha \cdot (1 + \cos^2(\vartheta)) / r)$$

Der Term  $1 + \cos^2(\vartheta)$  ist ja gleich eins, wenn  $\vartheta = 90^\circ$ , also wenn die Bewegung in  $y$ -Richtung erfolgt, und er ist gleich 2 für  $\vartheta = 0^\circ$  und  $\vartheta = 180^\circ$ , also wenn es sich um eine Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung handelt. Wir hätten diese Formel eigentlich auch erraten können ...

Aus der Ferne betrachtet verlangsamen sich also Geschwindigkeiten in der Nähe von grossen Massen. Das ist ja weiters nicht verwunderlich, wenn auch der Zeitablauf selber verlangsamt erscheint. Nun kommt aber der Hammer: Das gilt natürlich auch für die Lichtgeschwindigkeit !!

Messen wir in einem Labor am Ort  $r$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in *irgendeiner* Richtung, so werden wir den Standardwert  $c(r;r;\vartheta) = c_0 \approx 3 \cdot 10^8$  m/s erhalten. Diesen Wert haben wir aber (aus der Sicht eines Beobachters im OFF) mit unseren evtl. verkürzten Massstäben und sicher verlangsamten Uhren erhalten. Für einen Beobachter aus dem OFF muss sich also das Licht am Ort  $r$  im Gravitationsfeld der Masse  $M$  mit der langsameren und richtungsabhängigen Geschwindigkeit

$$c(r;\infty;\vartheta) \approx c(r;r;\vartheta) \cdot (1 - \alpha \cdot (1 + \cos^2(\vartheta)) / r) = c_0 \cdot (1 - \alpha \cdot (1 + \cos^2(\vartheta)) / r)$$

ausbreiten! Das heisst, dass für einen Beobachter im OFF die Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  nur noch eine Obergrenze für den gravitationsfreien Raum darstellt. In der Nähe von Massen kommt das Licht (aus dem OFF beobachtet) aber langsamer voran. Derweil messen lokale Beobachter vor Ort immer den bekannten Wert  $c_0$ . *Lokal* ist die Welt überall Lorentz'sch ...

Halten wir fest, mit welcher Geschwindigkeit sich das Licht für einen Beobachter im OFF in der Nähe von grossen Massen fortpflanzt:

$$\begin{aligned}
 c_x(r; \infty) &= c_0 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \alpha}{r}\right) \\
 c_y(r; \infty) &\approx c_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \\
 c(r; \infty; \delta) &\approx c_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{r} \cdot \left(1 + \cos^2(\delta)\right)\right)
 \end{aligned}$$

Gravitation wirkt also (aus der Ferne beobachtet) auf das Licht wie ein Brechungsindex ! Je stärker das Feld ist, desto langsamer kommt das Licht voran. Der Brechungsindex hängt dabei allerdings nicht nur vom Ort  $r$ , sondern auch noch von der Richtung  $\vartheta$  ab. Ändert sich aber der Brechungsindex, dann wird sich das Licht nicht mehr gradlinig ausbreiten - es sei denn, dass der Lichtstrahl genau entlang einer Feldlinie zum Zentrum von  $M$  läuft. In allen anderen Fällen muss das Phänomen der *Brechung* auftreten. Wir sind damit vorbereitet auf die Berechnung desjenigen Experimentes, dessen Ausgang Einstein über Nacht zu einer Berühmtheit ersten Ranges gemacht hat: Der Lichtablenkung am Sonnenrand, fotografierbar nur bei einer Sonnenfinsternis (12).

Tatsächlich transformieren sich aber *alle* Geschwindigkeiten gemäss den eingerahmten Formeln, man muss dabei nur  $c_0$  durch die lokal gemessene Geschwindigkeit  $v(r;r)$  ersetzen. Das bedeutet, dass derjenige Viertel eines Satelliten, welcher sich am nächsten bei der Erde befindet, etwas langsamer vorankommt als derjenige, der ganz aussen liegt. Wenn aber in einer Viererreihe die Leute ganz rechts immer ein bisschen schneller gehen als diejenigen ganz links, dann wird sich die Richtung, in der die Truppe marschiert, allmählich nach links drehen. Statt dass sich der frei fallende (oder fliegende) Satellit 'geradeaus' bewegt, läuft er daher in einer Bahn um die Erde ! Genau so erklärt Einstein die Wirkung der Gravitation - auf Kräfte kann er ganz verzichten. Die 'Verzerrungen' der Metrik des Raumes und der Raumzeit bewirken von selber, dass Trägheitsbahnen gerade so verlaufen, wie wir es von der Newtonschen Mechanik her kennen.

Wenn wir alles nur aus der Warte des Beobachters im OFF beschreiben, dann können wir ganz auf 'geschrumpfte Massstäbe' und 'verlangsamte Uhren' verzichten und alle Phänomene nur aus dieser Brechung in der Nähe von Massen ableiten. Tatsächlich sitzen wir aber mitten in solchen Gravitationsfeldern drin, und unsere Atomuhren zeigen die von Einstein geforderten Effekte heute direkt (15, 16 und 17). Es wäre ohnehin etwas elitär oder abgehoben, sich nur aus dem OFF mit der Welt zu befassen ...

Epstein widmet dem Thema "Gravitation durch Brechung" in [10-195ff] einen vierseitigen Einschub, dessen Lektüre der geneigten Leserin empfohlen sei. Eine sehr schöne Illustration dazu finden Sie auf der übernächsten Seite.

Damit können wir vielleicht auch schon die wenigen Worte verstehen, in welche Misner, Thorne und Wheeler die ganze Allgemeine Relativitätstheorie auf unübertreffliche Art zusammenfassen:

**"Matter tells space how to curve, and space tells matter how to move."** 'Telefonbuch' [27-0005]

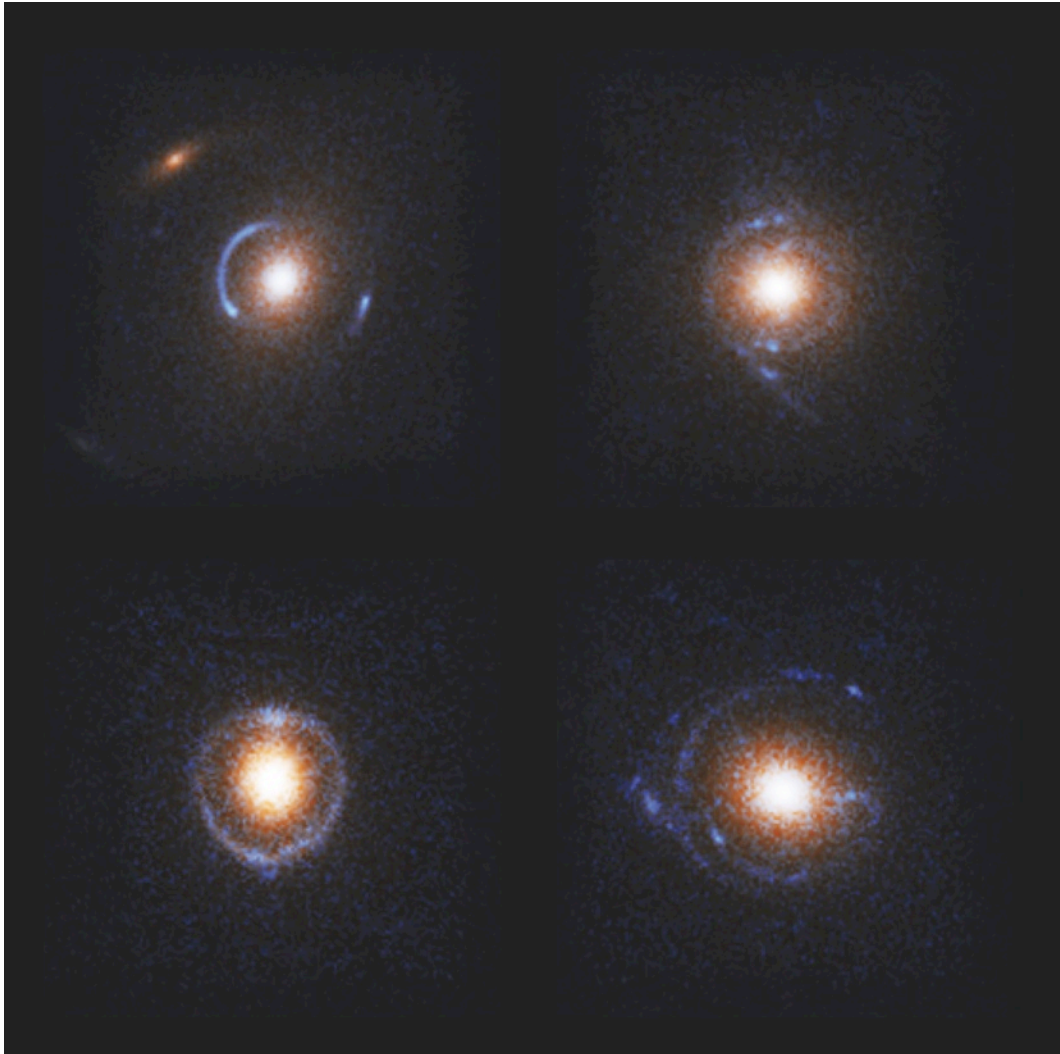
Ich versuche eine Übersetzung:

"Die Materie sagt dem Raum, wie er sich zu krümmen hat, und der Raum sagt der Materie, wie sie zu fallen hat."

Mit 'space' respektive 'Raum' ist dabei natürlich die 4d-Raumzeit gemeint ...

## G6 Aufgaben und Anregungen

1. Giessen Sie ganz langsam viel farblosen Zitronensirup in ein Glas, welches Sie vorher schon halb mit Wasser gefüllt haben. Richten Sie den Strahl eines Laserpointers quer durch das Glas und beobachten Sie, wie die lokal unterschiedlichen Brechungsindices lokal unterschiedliche Lichtgeschwindigkeiten und damit Richtungsänderungen provozieren!
2. Korrigieren und präzisieren Sie im Lehrbuch [8] die Seite 124 ! Sie behandelt das Schrumpfen von Massstäben in der Nähe von grossen Massen.
3. Besuchen Sie die Webseite “ [www.zarm.uni-bremen.de/index.htm](http://www.zarm.uni-bremen.de/index.htm) ” zum Fallturm in Bremen.
4. Berechnen Sie den Schwarzschildradius des Mondes, der Erde und der Sonne. Vergleichen Sie jeweils mit dem effektiven Radius dieser kugelförmigen Körper, d.h. bilden Sie den Quotienten  $R_s / R$  .
5. Berechnen Sie den Quotienten  $R_s / R$  auch für ein Atom und für einen Atomkern. Müssen die Effekte der ART in der Atomphysik oder in der Kernphysik demnach berücksichtigt werden ?
6. Lesen Sie die Einstein-Biographie [31] von Thomas Bührke! (dtv 31074)
7. Suchen Sie Unterlagen zu den Experimenten von Eötvös und Dicke zur Gleichheit von träger und schwerer Masse und studieren Sie die Grundidee dieser Experimente.
8. Der amerikanische Physiker Richard P. Feynman hat folgenden Vorschlag gemacht, um das Schrumpfen von Massstäben zu illustrieren: Man denke sich eine riesige Herdplatte, die so geheizt wird, dass sie in der Mitte kühl und nach aussen hin immer wärmer wird. Macht man es richtig, dann haben Masstäbe in radialer Richtung infolge der Wärmeausdehnung überall gerade die richtige Länge ! Was kann man damit schön zeigen - und welchen grundsätzlichen Mangel hat diese Konstruktion?
9. Denken Sie sich noch geeignete Uhren aus zur Herdplatten-Variante der Schwarzschild-Metrik.
10. Wieviele Sekunden macht es aus im Laufe eines Menschenlebens von 80 Jahren, ob man auf den Malediven oder in den Hochanden auf 4000 müM lebt ?
11. In einem Meteoriten sei eine ganz neue Art von Materie gefunden worden, bei der sich träge und schwere Masse unterscheiden. Wie kann man das überhaupt feststellen? Welche Folgen hätte das für die Gravitationstheorien von a) Newton b) Einstein
12. Was heisst eigentlich ‘gradlinig’ in einem Gravitationsfeld, in welchem der Weg von Lichtstrahlen krumm ist?
13. Zeigen Sie, dass eine Uhr an Bord eines Satelliten, der sich auf einem Kreis mit Radius  $r$  im Schwarzschild-Feld der Masse  $M$  bewegt, um den Faktor  $( 1 - 3 \cdot \alpha / (2 \cdot r) )$  langsamer geht als eine identische Uhr im OFF. Sie brauchen dafür die SRT *und* die ART !
14. Berechnen Sie den Gangunterschied zweier Uhren, die sich nahe der Erdoberfläche an Orten befinden, die eine Höhendifferenz von  $\Delta h$  aufweisen, indem Sie die Gravitation durch eine Rakete der Länge  $\Delta h$  ersetzen, die Sie mit  $g$  im feldfreien Raum beschleunigen. Setzen Sie für die Anfangsgeschwindigkeit 0 ein und berücksichtigen Sie den Dopplereffekt! Denn wenn die Signale oben an der Spitze ankommen, dann bewegt sich diese ja schon ein bisschen schneller als die Uhr am Boden bei der Aussendung des Signals ...



Einige der schönsten 'Einstein-Ringe' aus der Sammlung des Hubble-Weltraumteleskops. Sie entstehen dadurch, dass das Gravitationsfeld der zentralen, hellorangenen Galaxie für den Strahlengang des blauen Lichts einer weit hinter ihr liegenden Quelle (meist einem Quasar) wie eine Linse wirkt. Wir sehen dann dasselbe Objekt überall um den Rand der Vordergrund-Galaxie herum. Dabei wird auch die Intensität des Lichtes des Hintergrundobjektes massiv verstärkt.

Derartige Gravitationslinsen hat Einstein 1936 theoretisch vorausgesagt, er war aber eher pessimistisch hinsichtlich der Möglichkeit, diesen Effekt tatsächlich je zu beobachten. Es hat ja dann auch noch 60 Jahre gedauert ...

--> <http://hubblesite.org/newscenter/archive>, Suchbegriff 'gravitational lens'



Spiral Galaxy NGC 7424  
(VLT MELIPAL + VIMOS)

ESO PR Photo 33c/04 (1 December 2004)

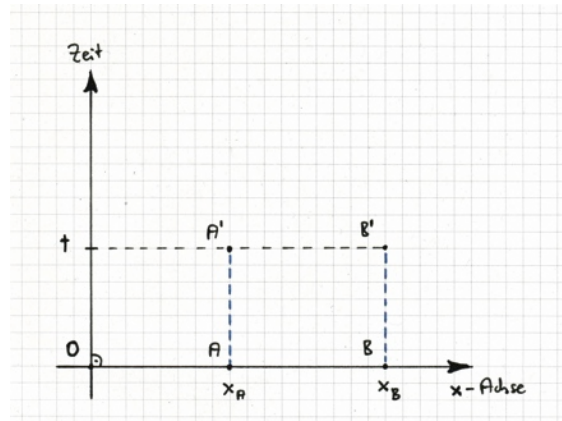
© European Southern Observatory

## H Epsteindiagramme zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Wir lernen von Epstein, wie wir in seinen Diagrammen erreichen können, dass Objekte spontan zu fallen beginnen und dass Uhren weniger schnell ticken, wenn sie sich an einem Ort mit stärkerer Gravitation befinden. Dafür müssen wir nur die uns vertrauten Epstein-Diagramme der SRT ein bisschen zurechtbiegen ... Das Schöne dabei ist, dass wir das Grundaxiom beibehalten können: Alle bewegen sich immer mit Lichtgeschwindigkeit durch die Raumzeit. Daraus ergibt sich auch eine neue Variante des Zwillings-Paradoxons. Wie gewohnt untersuchen wir die Angelegenheit auch quantitativ. Dann interpretieren wir die Ergebnisse noch durch ein Maximalprinzip. Der fünfte Abschnitt präsentiert die Epstein-Diagramme in einer eleganten eingerollten Fassung. Schliesslich lassen wir uns noch von Epstein zeigen, wie die Raumkrümmung allein schon die Trägheitsbahnen von schnellen Objekten krümmt. Dabei nehmen wir qualitativ gewisse Experimente vorweg, die wir noch genauer und zum Teil mit vollständiger Berechnung im Kapitel I besprechen werden.

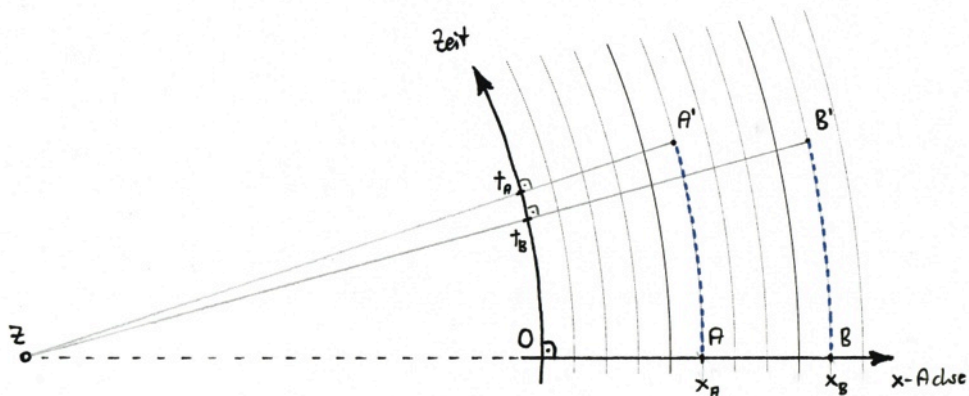
## H1 Gravitation und Krümmung der Raumzeit

Wir zeichnen nochmals ein Raumzeitdiagramm, wie wir es von der SRT her kennen und wie sie im Kapitel C eingeführt worden sind:



An den Orten  $x_A$  und  $x_B$  soll je eine Uhr stationiert sein, in A und B sollen beide Uhren auf null gestellt worden sein. Durch die Projektion der raumzeitlichen Position der Uhren auf die Zeitachse können wir später jederzeit ermitteln, welche Zeit diese Uhren dort anzeigen. Auf der Zeitachse kann man für jedes Objekt die seit dem Start des Vorgangs verstrichene Eigenzeit ablesen.

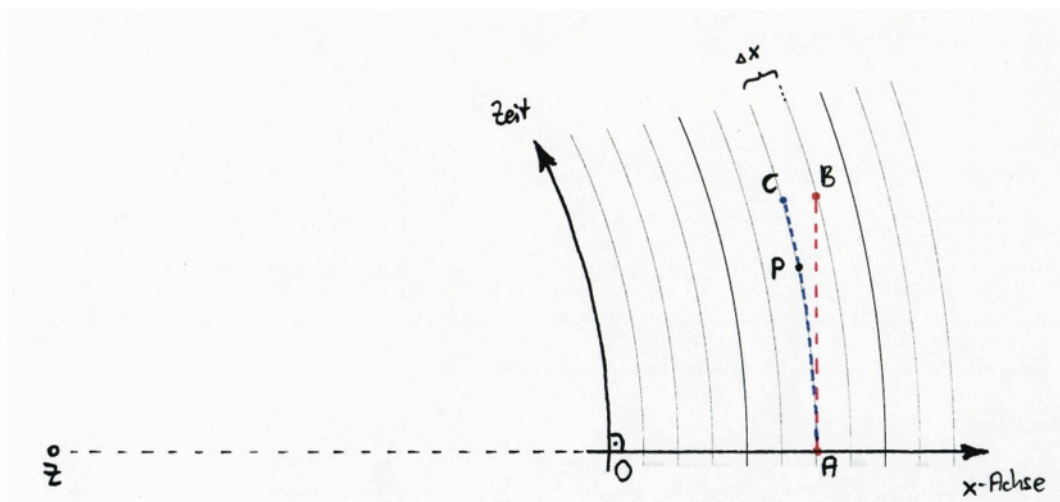
Nun sei die Gravitation am Ort  $x_B$  stärker als in  $x_A$ . Was ist jetzt zu tun, damit am Ort  $x_B$ , also entlang der Bahn  $BB'$  durch die Raumzeit, die Zeit etwas weniger schnell vergeht als am Ort  $x_A$ , also entlang des *genau gleich langen* Weges  $AA'$  durch die Raumzeit? Epstein zeigt uns die ebenso einfache wie elegante Lösung: Wir brauchen nur die Zeitachse ein wenig von B wegzubiegen, um die gewünschte Wirkung zu erzielen!



Objekte, die am Ort  $x_A$  verweilen, bewegen sich damit auf einem Kreis um Z mit Radius  $ZO+x_A$ , entsprechendes gilt für ortsfeste Objekte in  $x_B$ . Wichtig ist, dass die beiden Bogenstücke  $AA'$  und  $BB'$  genau gleich lang sind. Diese Bogenlänge gibt an, wie lange der Vorgang für einen Beobachter im OFF gedauert hat. Die für A respektive B verstrichene Eigenzeit können wir wieder ablesen, wenn wir  $A'$  respektive  $B'$  vertikal auf die jetzt kreisförmige Zeitachse projizieren. Dazu müssen wir nur  $A'$  und  $B'$  mit Z verbinden. Die Uhr in  $B'$  zeigt offenbar weniger Zeit an als diejenige in  $A'$ !

Die Krümmung der Zeitachse, also der Kehrwert des Radius  $ZA = ZA'$ , ist entscheidend dafür, wie stark der Effekt ist am Ort  $x_A$ . Diese Krümmung ist abhängig vom Abstand  $r$  vom Zentrum der Zentralmasse. Diese befindet sich rechts von  $x_B$ , da ja die Gravitation in  $x_B$  stärker ist als in  $x_A$ . Ist die Krümmung null, d.h. ist der Radius  $ZO$  unendlich gross wie im oberen Epsteindiagramm, so wirkt keine Gravitation und wir sind zurück in der SRT.

Wir haben jetzt das Verhalten von ortsgebundenen Objekten in einem Gravitationsfeld beschrieben. Als Beispiele für solche Objekte können Sie sich einen Apfel in den Niederlanden oder einen Tannenzapfen in den Schweizer Alpen vorstellen, die beide fest an ihrem Ast hängen. Was geschieht aber, wenn die Verbindung zwischen dem Stiel und dem Zweig reisst? Das Epstein-Diagramm hält auch eine Antwort auf diese Frage bereit:



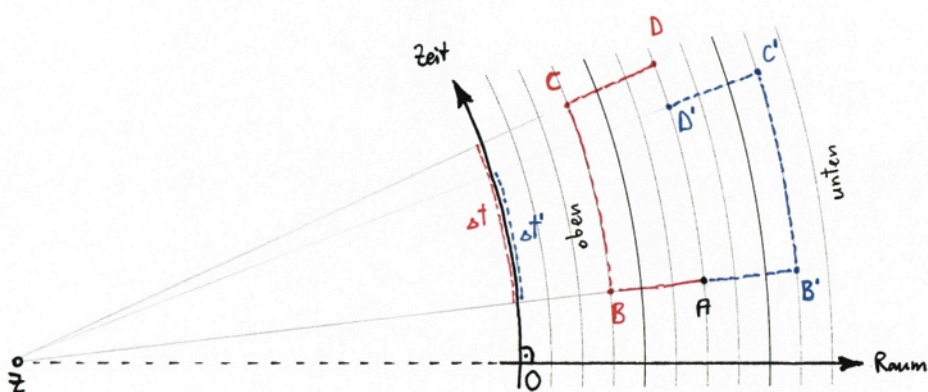
Apfel und Zweig befinden sich zum Zeitpunkt null am Ort A der Raumzeit. Genau dann soll die Verbindung der beiden gekappt werden. Der Zweig bewegt sich wie gehabt ortsfest von A nach C, während sich der Apfel tangential vom Kreisbogen AC entfernt und entlang der rot gestrichelten Linie nach B gelangt! Für den frei fallenden Apfel gibt es ja keine Gravitation mehr, für ihn stellt sich die Sache eher so dar, dass der Baum von der Erde daran gehindert wird, einer Trägheitsbahn zu folgen. Nach kurzer Zeit liegt die Distanz  $\Delta x$  zwischen Apfel und Zweig, wobei der Apfel sich in diejenige Richtung bewegt hat, in der das Massenzentrum liegt. Die Bogenlänge AC und die Länge der Strecke AB sind dabei wieder genau gleich lang.

Der Zweig überstreicht den Bogen AC proportional zur Zeit. Ist er am Ort P auf diesem Bogen, so ist der Winkel zwischen der Tangenten an den Kreisbogen in P und der roten Linie AB gleich dem Winkel PZO. Dieser Winkel gibt aber an, wie schnell sich der Apfel momentan vom Zweig entfernt, bedeutet also nichts anderes als die Relativgeschwindigkeit von Apfel und Zweig. Wir können also sogar das Fallgesetz von Galilei aus dem Diagramm herauslesen: Unabhängig von der Masse des Apfels nimmt seine Geschwindigkeit proportional zur verstrichenen Zeit zu. Wir erinnern aber nochmals daran, dass dieses Gesetz einen eingeschränkten Geltungsbereich hat:  $v$  soll bei uns immer viel kleiner als  $c$  bleiben!

Der Winkel zwischen zwei Kurven im Raumzeit-Diagramm bedeutet also immer noch eine Relativgeschwindigkeit. Genauer:  $\sin(\varphi) = v/c$ ! Der maximal mögliche Winkel ist immer noch  $90^\circ$ . Licht bewegt sich wie gehabt senkrecht zur Zeitachse. Eine quantitative Auswertung dieses Zwischenwinkels für den Fall von Äpfeln an der Erdoberfläche ist aber heikel, wie die Rechnung im Abschnitt **H3** zeigen wird. Vorher wollen wir unsere krummen Raumzeit-Diagramme noch verwenden, um eine neue Variante des Zwillings-Paradoxons darzustellen.

## H2 Nochmals Zwillinge, die unterschiedlich schnell altern

Ein Bild sagt mehr als tausend Worte:



Epsteins Zwillinge Peter und Danny wollen endlich nicht mehr gleich alt sein. Da die Zeit in einem Gravitationsfeld 'unten' langsamer läuft als 'oben' beschliessen sie beim Tee im ersten Stock, dass Peter einige Zeit im Estrich verbringen soll, während es sich Danny im Keller gemütlich macht. Im Punkt A beginnen sie diesen Plan umzusetzen. Die Strecken AB und AB' sowie CD und C'D' sind gleich lang. Sind aber auch die Bogen BC und B'C' gleich lang, so treffen sich die beiden gleichzeitig wieder im ersten Stock, also am Ort von A, D' und D. Peter ist jetzt wirklich ein bisschen älter als Danny! Was soll denn aber heissen dass sie sich 'gleichzeitig' treffen? Damit nehmen wir wieder den Standpunkt eines Beobachters im OFF ein. Für diesen verstreicht während des ganzen Experimentes die Zeit  $AB + BC + CD = AB' + B'C' + C'D'$ . Für den roten Peter verstreicht derweil nur die Projektion des Bogens BC auf die Zeitachse (also das rote  $\Delta t$ ), während für den blauen Danny noch weniger Zeit vergangen ist. Für ihn ist die Projektion von B'C' auf die Zeitachse massgebend (also das blaue  $\Delta t'$ ).

Haben Sie bemerkt, dass Peter und Danny sehr flink waren beim Treppensteigen? Wie schnell haben sie sich dabei bewegt? Nun, die ganze Geschichte würde auch funktionieren, wenn sie es etwas gemütlicher nähmen. Die Zeichnung würde aber dadurch erheblich komplizierter.

es git e bueb mit name fritz, es git e bueb mit name fritz  
und dä cha renne wi dr blitz, und dä cha renne wi dr blitz.

är rennt, dä unerhört athlet, är rennt, dä unerhört athlet  
so schnäll, das me ne gar nid gseht, so schnäll, das me ne gar nid gseht.

und wil er geng isch grennt bis jitz, und wil er geng isch grennt bis jitz  
het ne no niemer gseh, dr fritz, het ne no niemer gseh, dr fritz.

und ig sogar, dr värslischmid, und ig sogar, dr värslischmid,  
mues zuegäh: vilich gits ne nid, mues zuegäh: vilich gits ne nid.

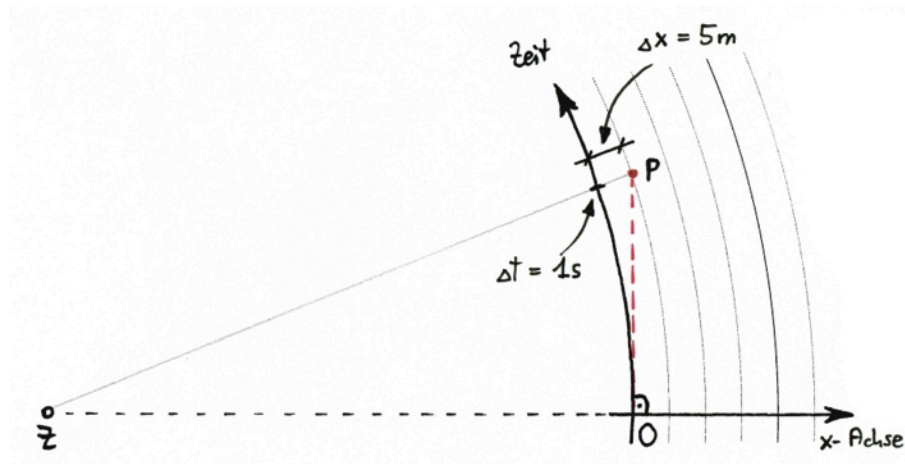
Text und Lied von Mani Matter [46-41]

( Fritz wird ein Opfer von Ockham's Rasiermesser ! Siehe Aufgabe 1 in [H7](#))

### H3 Eine quantitative Betrachtung

Wie tief fällt ein Apfel aus anfänglicher Ruhe in einer Sekunde ? Setzt man für  $g$  den gerundeten Wert 10 ein, so erhalten wir aus  $\Delta h = 0.5 \cdot g \cdot \Delta t^2$  eine Fallstrecke von 5 m. Eine Sekunde Zeit entspricht aber in einem massstäblichen Diagramm einer Länge von 300'000'000 m ! Gehört zu einer Sekunde im Diagramm eine Streckenlänge von 3 cm, so gehört zu einer Strecke von 5 m im Diagramm eine Linie der Länge 0.5 Nanometer, das sind gerade mal einige Atomdurchmesser.

Rechnen wir aus, wie gross der Radius der Zeitachse respektive wie klein deren Krümmung ist, wenn das Raumzeit-Diagramm zur Stärke des Gravitationsfeldes an der Erdoberfläche passen soll:



Wir setzen alle Strecken im Raumzeit-Diagramm in Metern ein. Die Kathete  $OP$  im rechtwinkligen Dreieck  $ZOP$  hat dann in guter Näherung die Länge  $c \cdot 1s = 3 \cdot 10^8$  m (das Resultat wird zeigen, dass diese Näherung sogar extrem gut ist ...). Der 'Pythagoras' liefert nun

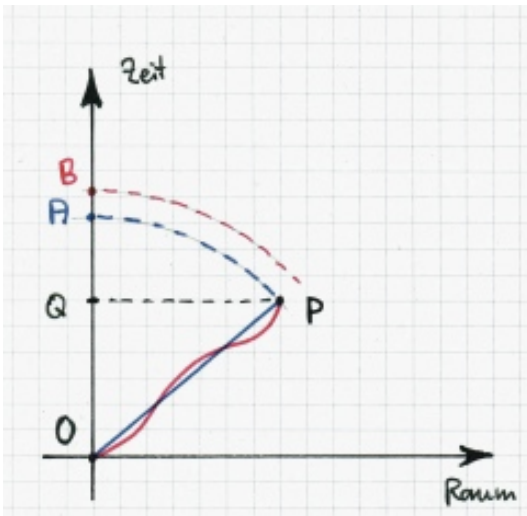
$$ZP^2 = ZO^2 + OP^2 \quad ; \quad (ZO + 5)^2 \approx ZO^2 + (3 \cdot 10^8)^2 \quad ; \quad ZO^2 + 2 \cdot ZO \cdot 5 + 5^2 \approx ZO^2 + 9 \cdot 10^{16}$$

$$10 \cdot ZO \approx 9 \cdot 10^{16} - 25 \quad ; \quad ZO \approx 9 \cdot 10^{15} - 2.5 \quad \text{und somit} \quad ZO \approx 9 \cdot 10^{15}$$

Wenn die Krümmung der Zeitachse zur Stärke der Gravitation an der Erdoberfläche passen soll, dann muss der Radius  $ZO$  also  $9 \cdot 10^{15}$  m betragen, was ziemlich genau einem Lichtjahr entspricht! Zum Vergleich: Der nächste Fixstern liegt etwa 4 Lichtjahre von uns entfernt, die grosse Halbachse der Plutobahn beträgt nur  $5.9 \cdot 10^{12}$  m . Der korrekte Kreisradius ist also immens, und entsprechend ist die korrekte Krümmung verschwindend klein. Wir haben es wirklich mit einem schwachen Gravitationsfeld zu tun, von blossen Auge könnten wir die Krümmung gar nicht erkennen.

Es ist aber diese winzige Krümmung der Raumzeit an der Erdoberfläche, welche frei bewegliche Objekte fallen lässt und welche das Treppensteigen so anstrengend macht!

## H4 Das Prinzip der maximalen Eigenzeit



Auf welchem Weg sich auch eine Uhr von O nach P durch die Raumzeit bewegt - die Zeit, die dabei auf der Uhr verstreicht, ist immer OQ. Der rote und der blaue Weg unterscheiden sich aber dadurch, dass für einen in einem Inertialsystem ruhenden Beobachter unterschiedlich viel Zeit verstreicht, während die Uhr ihren Weg von O nach P macht. Für den blauen Weg finden wir diese Zeit schnell, es ist einfach die Länge der Strecke  $OP = OA$ . Da aber alle immer gleich viel Weg durch die Raumzeit zurücklegen, brauchen wir den roten Weg nur zu strecken und wir finden dann die dazugehörige verstrichene Zeit OB.

Die *Eigenzeit* OQ, die auf der Uhr verstreicht, ist also unabhängig vom gewählten Weg, nicht aber der Quotient aus dieser Eigenzeit und der dabei für einen Inertialbeobachter verstrichenen *Koordinatenzeit*. Der Name "Prinzip der maximalen Eigenzeit" ist hier ein bisschen irreführend; was tatsächlich maximiert wird ist der Quotient  $\Delta\tau / \Delta t$ , wenn wir wie Epstein mit  $\tau$  die Eigenzeit und mit  $t$  die Koordinatenzeit bezeichnen. Sie sehen, dass wir die symmetrische Darstellung, die wir für die SRT bevorzugt haben, nun aufgeben zugunsten des Inertialbeobachters im OFF, der in der ART wirklich eine Sonderstellung hat.

**Prinzip der maximalen Eigenzeit: Kann man sich kräftefrei von X nach Y durch die Raumzeit bewegen, so geschieht das entlang einer Bahn, bei welcher für den Quotienten  $\Delta\tau / \Delta t$  ein Maximum resultiert, wobei  $\Delta\tau$  auf einer mitbewegten Uhr gemessen wird.**

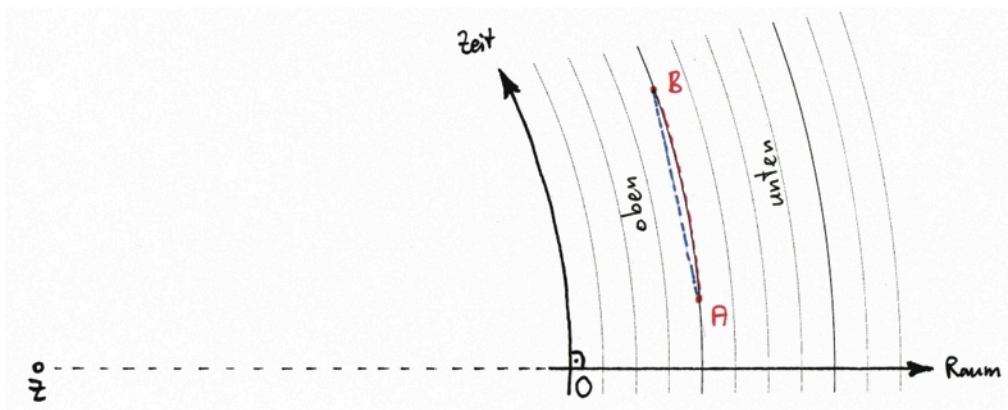
In der SRT sind solche Bahnen einfach gerade Strecken. Jeder andere Weg durch die Raumzeit ist länger und vergrößert damit den Nenner  $\Delta t$ . Bevor wir nun in einem Beispiel untersuchen, wie sich die Situation in der ART verhält, möchte ich noch betonen, dass wir hier *nicht* fragen, welchen Weg das Licht von einem Ort A zu einem anderen Ort B durch den *Raum* nimmt, das machen wir später. Hier geht es um Falllinien durch die *Raumzeit*.

Nun also zum Beispiel:

Welches ist die kräftefreie Bahn, welche von einem Punkt A auf der Erdoberfläche 2 Sekunden später wieder zum gleichen Ort führt? Es ist ein vertikaler Wurf mit Anfangsgeschwindigkeit 10 m/s. Während der ersten Sekunde steigt das Objekt auf eine Höhe von 5m und wird dabei immer langsamer, in der zweiten Sekunde folgt ein freier Fall aus dieser Höhe zurück zum Anfangsort. Wir kennen die Bewegungsgleichungen und die Bahnkurve im Raum:

$$h(t) = v_0 t - 0.5 \cdot g \cdot t^2 \approx 10 \cdot t - 5 \cdot t^2 \quad \text{und} \quad v(t) = v_0 - g \cdot t \approx 10 - 10 \cdot t$$

Warum erfüllt gerade *diese* Bewegung das Prinzip der maximalen Eigenzeit, warum ist es nicht vorteilhafter, einfach am Ort zu verweilen oder aber auf eine Höhe von 20 Metern aufzusteigen? Betrachten wir zuerst das zugehörige Epstein-Diagramm:



Die verstrichene Koordinatenzeit ist einfach die Länge des Bogens AB, der Abwurfort legt ja diesen Weg durch die Raumzeit zurück. Diesmal ist aufgrund der Fragestellung der Nenner im Term  $\Delta\tau / \Delta t$  konstant; hier geht es wirklich darum, die verstrichene Eigenzeit im Zähler zu maximieren. Warum ist dabei der blaue Weg vorteilhafter? Genau: Weiter oben laufen doch die Uhren schneller! Warum geht man dann aber nicht noch weiter hinauf? Auch klar: Man müsste dann so schnell auf- und wieder absteigen, dass die Zeitdilatation infolge der hohen Geschwindigkeit den Vorteil der grösseren Höhe mehr als auffressen würde! ART empfiehlt eine hohe Bahn, SRT empfiehlt möglichst kleine Geschwindigkeiten - und der optimale Kompromiss ist unser vertikaler Wurf!

Welchen Zeitzuwachs bringt der vertikale Wurf? Wir haben auf p.111 in G4 schon hergeleitet, wie der Zeitüberschuss vom Höhenunterschied abhängt:

$$\frac{\Delta t(h) - \Delta t_0}{\Delta t_0} \approx \frac{g \cdot \Delta h}{c^2}$$

Diesen Vorsprung pro Zeiteinheit  $\Delta t$  müssen wir nun für die ganze Flugzeit von 2 Sekunden aufsummieren. Das entsprechende Integral ist harmlos:

$$\int_0^2 \frac{g \cdot \Delta h}{c^2} \cdot dt = \frac{g}{c^2} \cdot \int_0^2 (10 \cdot t - 5 \cdot t^2) \cdot dt = \dots = \frac{g}{c^2} \cdot \frac{20}{3} \approx \frac{200}{3 \cdot c^2}$$

Das ist die dank dem Hopser zusätzlich verstrichene Eigenzeit in Sekunden. Wir müssen dem aber den Eigenzeitverlust infolge der Geschwindigkeit gegenüberstellen. Dabei gilt nach SRT

$$\frac{\Delta t_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta t_0}{\Delta t_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 = \left( 1 - \frac{v^2}{2 \cdot c^2} - \frac{v^4}{8 \cdot c^4} - \dots \right) - 1 \approx -\frac{v^2}{2 \cdot c^2}$$

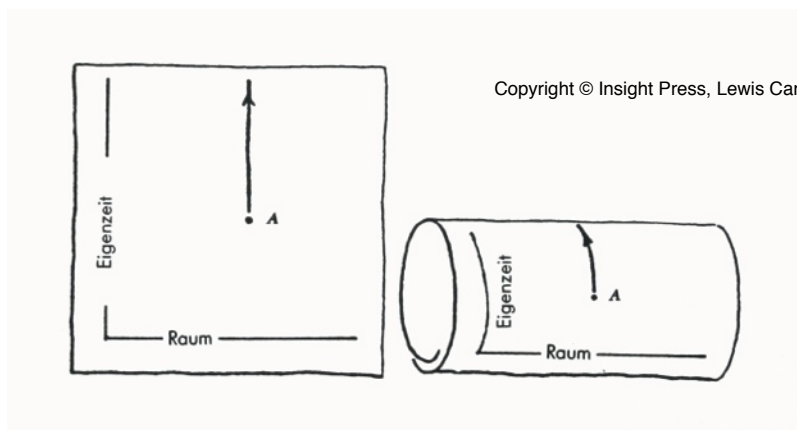
Wir kennen  $v(t) \approx 10 - 10 \cdot t$  und können also wieder von 0 bis 2 über die Zeit  $t$  integrieren. Auch dieses Integral ist ganz harmlos:

$$\int_0^2 -\frac{v^2}{2 \cdot c^2} \cdot dt = \frac{-1}{2 \cdot c^2} \cdot \int_0^2 (10 - 10 \cdot t)^2 \cdot dt = \frac{-100}{2 \cdot c^2} \cdot \int_0^2 (1-t)^2 \cdot dt = \dots = \frac{-100}{2 \cdot c^2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{-100}{3 \cdot c^2}$$

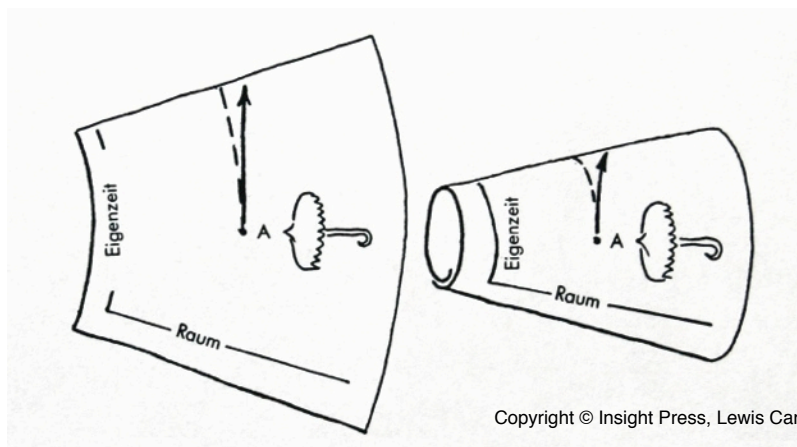
Der Verlust nach SRT ist damit nur halb so gross wie der Gewinn nach ART, die Gesamtbilanz ist mit  $+100 / (3 \cdot c^2)$  Sekunden positiv. In der Aufgabe 4 werden Sie angeleitet zu zeigen, dass der Zuwachs an Eigenzeit gerade auf *dieser* Parabel am grössten ist, bei noch höheren Bahnen wächst der Verlust infolge der SRT schneller als der Zuwachs dank der ART - und umgekehrt. Die Lösung von Galilei und Newton entspricht also genau derjenigen Parabel, welche dem Prinzip der maximalen Eigenzeit genügt!

## H5 Epstein-Diagramme - flach oder eingerollt

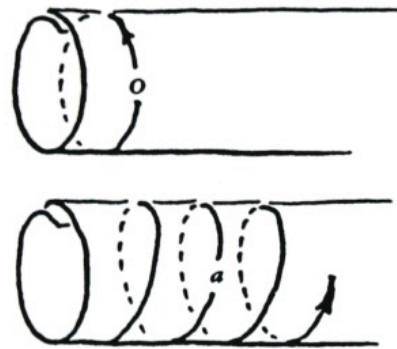
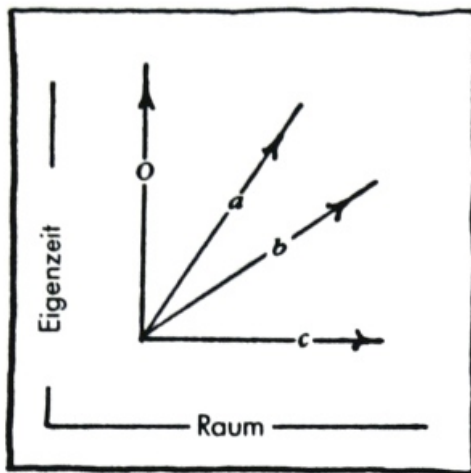
Bei periodischen Vorgängen wie zum Beispiel dem Auf- und Abschwingen eines Federpendels im Gravitationsfeld oder dem etwas fiktiven freien Fall durch einen Tunnel, der die ganze Erde durchquert, gelangt das sich bewegende Objekt immer wieder an denselben Ort. Solche Vorgänge lassen sich sehr schön in der eingerollten Variante der Epstein-Diagramme darstellen:



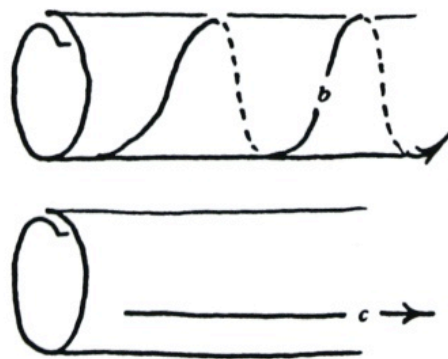
Das ist die Situation ohne Gravitation, wir sind ausschliesslich im Reich der SRT. Was erhält man denn, wenn man die gekrümmten Diagramme vom Abschnitt **H1** einrollt? Genau, einen Lampenschirm oder - etwas gelehrter gesagt - einen Kegelstumpf:



In seinen Grafiken [10-181ff] deutet Epstein gelegentlich durch Gläser oder Sonnenschirme an, in welcher Richtung es 'nach unten' geht im Gravitationsfeld (alle Grafiken in diesem Abschnitt sind mit freundlicher Genehmigung durch den Verlag dem Kapitel 10 seines Buches entnommen). Man sieht wieder schön, dass ein Objekt, welches nicht durch Kräfte an seinem Ort festgehalten wird, sich geradlinig durch die Raumzeit bewegt und dadurch nach 'unten' fällt. Der Winkel  $\varphi$  zwischen dieser 'Fall-Linie' und den Kreisen auf der Kegeloberfläche, die jetzt zu einem fixen Ort gehören und deren Mittelpunkt auf der Symmetrieachse des Kegels liegen, dieser Winkel also wird immer grösser. Es gilt aber immer noch  $\sin(\varphi) = v/c$ . Das bedeutet gerade, dass die Relativgeschwindigkeit zwischen ortsfesten Punkten und dem frei fallenden Objekt immer grösser wird - genau wie wir das auf p.119 schon einmal ausgeführt haben.



Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein



Betrachten wir noch die Bahnen von verschiedenen schnellen Objekten in der gravitationslosen Raumzeit. Die plane Darstellung ist uns vertraut: o ruht im Koordinatennullpunkt, a ist schon recht schnell, b ist noch schneller, und wie c benehmen sich unsere Lichtteilchen.

Für alle vier Geschwindigkeiten ist rechts dargestellt, wie das in der eingerollten Variante aussieht. Wir erhalten vier schöne, einfache Bahnen auf einer Zylinderoberfläche.

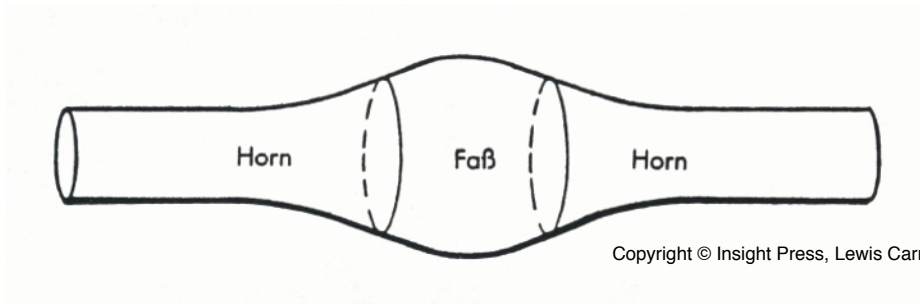
Wir könnten jetzt studieren, wie sich das in einem *homogenen* Gravitationsfeld präsentiert, wo  $g$  und damit die Krümmung der Raumzeit konstant sind. Eine solche Lampenschirm-Welt ist zwar schon eine gute Darstellung der *lokalen* Situation in einem bestimmten Abstand vom Zentrum der felderzeugenden Masse. Grossräumige Bewegungen lassen sich damit aber nicht darstellen!

Welches ist denn der Rotationskörper, wenn die Krümmung mit zunehmender Annäherung an die Erdoberfläche immer stärker wird - oder, in anderer Sprechweise, wenn ein Umlauf an Ort immer mehr Eigenzeit beansprucht? Die Antwort ist: Etwas, das aussieht wie der Trichter einer Posaune oder eines Hörrohrs. Epstein nennt diesen Körper ein *Horn*:



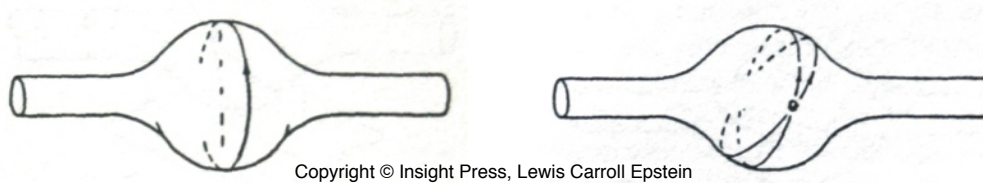
Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein

Es ist hier je ein grosser Ausschnitt der x-Achse auf beiden Seiten der Erde zusammen mit der eingerollten Zeitachse dargestellt. In der Lücke dazwischen muss die Situation im Erdinnern dargestellt werden. Dort nimmt aber die Gravitation (und damit die Krümmung) bis zur Erdmitte linear ab. Daher muss zwischen die beiden Hörner eine Kugel mit abgetrennten Polkappen eingepasst werden.

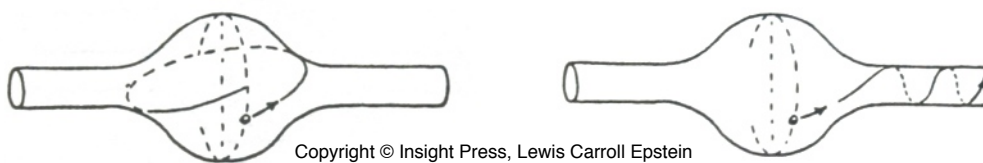


Das 'Faß' in der Mitte ist also eigentlich aus einer Kugel herausgeschnitten, wie wir gleich noch beweisen werden. Stellen Sie sich jetzt einen zylindrischen Tunnel von der Schweiz genau durch die Erdmitte etwa nach Neuseeland vor. Die Tunnelachse ist identisch mit unserer x-Achse, der Nullpunkt ist identisch mit dem Mittelpunkt der Erde. Wir können nun von jedem Punkt der x-Achse ein Objekt mit oder ohne Anfangsgeschwindigkeit auf eine Reise durch die Erde entlang der x-Achse schicken.

Objekte, die innerhalb der Erde fallengelassen werden, schwingen genau wie ein Federpendel hin und her um den Mittelpunkt der Erde. Im Erdinnern erfüllt ja die Gravitationskraft das Hooke'sche Gesetz:  $\mathbf{F} = -k \cdot \Delta \mathbf{x}$ . Daher ist - wie beim Federpendel auch - die Schwingungsdauer unabhängig von der anfänglichen Auslenkung aus der Ruhelage, die geschlossenen Bahnen in unserer eingrollten Raumzeit müssen daher gleich lang sein, unabhängig von der gewählten Anfangsgeschwindigkeit! Dies ist genau dann erfüllt, wenn das 'Faß' zwischen den beiden Hörnern ein Ausschnitt aus einer Kugel ist! Die 'geradlinigen' Bahnen, die ja zum freien Fallen gehören, sind nur auf einer Kugeloberfläche immer geschlossen und haben auch noch in allen Fällen dieselbe Länge pro Umlauf:



Wirft man ein Objekt aber mit  $v_0 > 0$  in diesen Tunnel, so gelangt es über das kugelförmige Gebiet hinaus und es wird etwas mehr Eigenzeit verstreichen pro Umlauf als beim Pendeln innerhalb der Erde (Skizze unten links). Ist die Anfangsgeschwindigkeit gar grösser als die Fluchtgeschwindigkeit von etwa 11.2 km/s, so entschwindet das Objekt auf Nimmerwiedersehen (Skizze unten rechts):



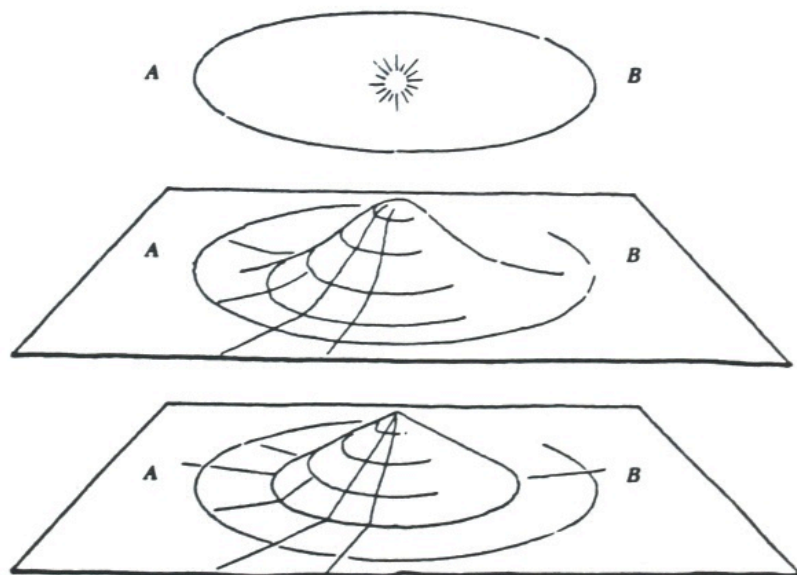
Soviel zur Krümmung der Raumzeit als Ursache von Effekten, für die wir in der Newton'schen Physik Kräfte verantwortlich machen. Das ist aber erst die halbe Geschichte: Auch die Metrik des Raumes allein ist ja verzerrt. Die Auswirkungen davon studieren wir - wieder mit Epstein - im nächsten Abschnitt.

Interaktiv können Sie genau das studieren unter dem folgenden Weblink:  
<http://www.relativity.li/uploads/flash/gravitation.swf>

## H6 Gravitation und Krümmung des Raumes

Wir haben in G4 auf p.109 schon gesehen, dass die Metrik des Raumes in der Nähe einer gravitierenden Masse nicht mehr den Gesetzen von Euklid gehorcht. So ist zum Beispiel der mit lokalen Massstäben gemessene Durchmesser der Erde etwas grösser als der Erdumfang geteilt durch die Kreiszahl  $\pi$ . Der Effekt ist in einem schwachen Gravitationsfeld wie demjenigen der Erde wieder sehr klein, in der Umgebung der Sonne ist er aber heute experimentell leicht nachzuweisen.

Betrachten Sie nochmals die Illustration auf p.109. Mit der Delle oder, Epstein zuliebe, mit einer Beule kann man das Verhalten dieser Metrik in einer zusätzlichen Dimension, die nichts mit der z-Richtung zu tun hat, gut sichtbar machen. Epstein gibt in [10-207ff] ausführliche Anweisungen, wie man sich ein Modell einer solchen Ebene durch den Mittelpunkt der Sonne (also der Ekliptik) selber basteln kann. Die kontinuierlichen Änderungen der Krümmung werden dabei der Einfachheit halber ignoriert, die ganze Beule wird durch einen Kegel dargestellt:

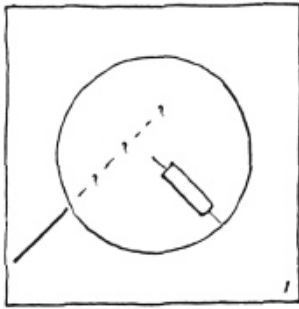


Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein

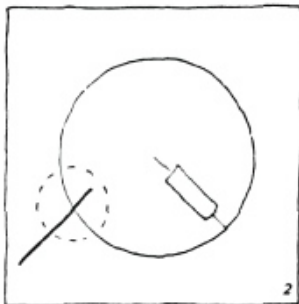
Dieses einfache Modell zeigt qualitativ schon alle Effekte, welche nach der ART ihre Ursache in der nichteuklidischen Metrik des Raumes haben.

Ich traue dem Leser und sowieso der Leserin durchaus zu, einen solchen Kegel ohne zusätzliche Anleitung selber zu basteln. Zu beachten ist, dass es später einfach sein muss, den Kegelmantel zu 'öffnen' und in die Tischebene abzuwickeln und nachher wieder zum Kegel aufzurichten. Also eher die milchige Sorte Scotch Klebbänder verwenden und nicht die glasklare ...

Auf der folgenden Seite können wir mit einem solchen Modell - immer der Vorlage [10-207ff] von Epstein folgend - erkennen, welchen Effekt eine solche Raumbeule auf den Weg eines Lichtstrahls hat. Weitere schöne Anwendungen folgen noch im Abschnitt I. Es ist wirklich genial, mit welchen einfachen Mitteln Epstein die Auswirkungen der Raumkrümmung korrekt und klar zeigen kann!



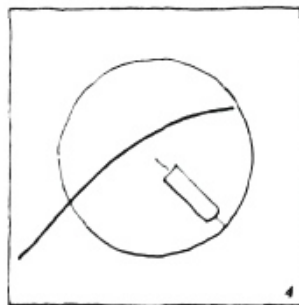
Ein Lichtstrahl nähert sich unserer Raumböule. Welchem Weg wird er folgen, wenn er in den Bereich der nicht-euklidischen Metrik gerät ?



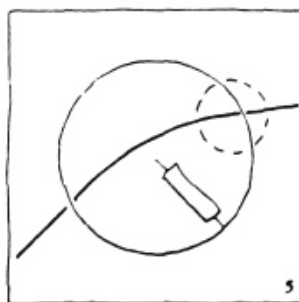
Den Übergang von der Zeichenebene auf den Kegelmantel schaffen wir elegant: Erinnern Sie sich daran, dass die Böule eigentlich sanft aus der Ebene ansteigen sollte und dass es diese Kante also gar nicht gibt! Drücken Sie den Kegelmantel lokal einfach ein bisschen flach (gestrichelter Kreis) und verlängern Sie den Strahl gradlinig in den gestrichelten Kreis hinein.



Der Lichtstrahl wird sich weiterhin 'gradlinig' ausbreiten. Was heisst das aber auf dem Kegelmantel? Sie können das leicht umsetzen, wenn Sie den Kegelmantel in die Zeichenebene abwickeln. Verlängern Sie dann das kleine, gerade Stück, das Sie innerhalb des gestrichelten Kreises schon auf dem Kegelmantel haben, bis der Lichtstrahl den Kegelmantel wieder verlässt.



Richten Sie den Kegel wieder in seiner 3d-Gestalt auf. Stellen Sie ihn an genau dieselbe Position, die er im Bild 2 schon innehatte. Damit haben wir - von oben betrachtet - die Verhältnisse der verzerrten Raumgeometrie in der Umgebung einer grossen Masse hergestellt. Wir sehen jetzt, welchen Weg der Lichtstrahl um das Zentrum dieser Masse einschlägt.



Genau gleich wie beim Schritt 2 können wir jetzt den weiteren Strahlengang konstruieren. Den Kegel im gestrichelten Kreis flachdrücken, dann das gerade Stück am Kegelrand in die Ebene hinaus verlängern - fertig!

Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein

Lichtteilchen fallen in einem Gravitationsfeld (wie alles andere) schon wegen der Krümmung der Raumzeit in Richtung des Massenzentrums. Da dieses Fallen unabhängig ist von der Masse des fallenden Teilchens, konnte man diesen Effekt bereits berechnen, bevor man wusste, welche träge Masse die Lichtteilchen haben. Der 27-jährige Johan Soldner hat 1803 einen Aufsatz vorgelegt, in welchem er aufgrund von Newtons Theorie die Ablenkung eines Lichtstrahls berechnete, der knapp am Sonnenrand vorbei läuft. Das Ergebnis seiner Rechnung war ein Winkel von 0.875 Bogensekunden. Genau diesen Wert erhielt Einstein auch, als er 1911 seine noch etwas unausgeglichene neue Theorie testete. 1916 lieferte die 'fertige' ART aber eine Prognose von 1.75 Bogensekunden, also den doppelten Wert. Dieser Winkel war nun auch so gross, dass die Chance bestand, ihn anlässlich einer Sonnenfinsternis auf einer Photographie der Sterne in Sonnennähe deutlich ausmessen zu können. Genau dies ist dann 1919 zwei Exkursionen unter der Leitung des 'royal astronomers' Arthur Stanley Eddington auch gelungen.

Es war der Teil der Raumkrümmung, der in der Theorie von 1911 noch gefehlt hat. Beide Krümmungen (Raum-Zeit und Raum-Raum) wirken etwa zu selben Teilen und verdoppeln insgesamt den Effekt. Damit entstand auch eine Differenz zur Newton'schen Theorie, welche einen Entscheid zugunsten der ART und gegen Newton durch ein Experiment ermöglichte. Zwei Theorien mögen ja noch so unterschiedlich aufgebaut sein - wenn sie für alle Erscheinungen dieselben Prognosen machen, lässt sich *mit einem Experiment* nicht entscheiden, welcher man den Vorzug geben soll. Grundsätzlich können Experimente eine Theorie ja nur widerlegen, aber nie beweisen.

Es gibt jedoch einen bemerkenswerten Unterschied zwischen der Krümmung der Raumzeit und derjenigen des Raumes: Die Raumkrümmung wirkt nur auf Objekte, welche sich durch den Raum bewegen, sie hat keinerlei Einfluss auf Objekte, deren Geschwindigkeit null ist! Insbesondere kann die Raumkrümmung nicht bewirken, dass ein Objekt zu fallen beginnt. Wenn es aber einmal fällt, dann nimmt sie Einfluss auf seine Bahn. Dass der Apfel aber überhaupt zu fallen beginnt ist allein der Krümmung der Raumzeit zuzuschreiben.

Epstein bietet auch dazu eine interessante Analogie [10-210, Fussnote]: Es ist wie bei der Wirkung von elektrischen und magnetischen Feldern auf geladene Teilchen. Die Coulombkraft ist da und wirkt, unabhängig von der Geschwindigkeit des Teilchens. Das Magnetfeld hat aber keine Wirkung auf eine ruhende Ladung, die Lorentzkraft ist ja proportional zur Geschwindigkeit. Hier hört die Analogie leider auf zu funktionieren: Die Auswirkung der Raumkrümmung auf Bahnen von fallenden Objekten hängt *nicht* von deren Geschwindigkeit ab, wichtig ist nur, *dass* sie überhaupt eine Bahn durch den Raum einschlagen. Die Geschwindigkeit hat aber einen grossen Einfluss darauf, wie lange die Krümmung der Raumzeit wirken kann. Da passt die Analogie wieder, das ist ja bei einem geladenen Teilchen in einem elektrischen Feld genauso.

Sollte man nun diese Analogie in einer späteren Auflage (ich mache einen Scherz ...) ganz weglassen, weil sie nicht perfekt ist ?

“Wenn ein Käfer an einem gekrümmten Ast entlang kriecht, merkt er nicht, dass der Ast krumm ist. Ich hatte das Glück zu bemerken, was der Käfer nicht bemerkt hat.”

Einstein versuchte so seinem 9-jährigen Sohn Eduard zu erklären, warum er so berühmt sei.  
[32-43]

## H7 Aufgaben und Anregungen

1. Lesen Sie bei Wikipedia, was man unter 'occam's razor' oder 'Ockham's Rasiermesser' versteht. Denken Sie dann an den Äther, an parallele Universen und an die zusätzlichen 6 bis 8 Dimensionen, welche die modernen Stringtheorien unserer Welt hinzufügen.
2. Berechnen Sie wie in **H3**, welchen Krümmungsradius ein Raumzeit-Diagramm hat, welches die Situation an der Oberfläche der Sonne darstellt.
3. Zeichnen Sie zu den 4 Bahnen, die auf p.126 unten dargestellt sind, die flachen, ungekrümmten Epsteindiagramme, die ein im Nullpunkt ruhender Beobachter dazu anfertigen würde.
4. Berechnen Sie den Eigenzeitgewinn nach ART und den entsprechenden Verlust nach SRT wie auf p.123 für eine beliebige Parabel  $v(t) = k - k \cdot t$  und  $h(t) = k \cdot t - 0.5 \cdot k \cdot t^2$ , welche ein Objekt nach 2 Sekunden wieder zum selben Ort bringt. Leiten Sie dann den Gesamtgewinn nach  $k$  ab und zeigen Sie, dass er gerade für  $k = g$  maximal ist!
5. Bertrand Russell hat für das 'Prinzip der maximalen Eigenzeit' den etwas saloppen Ausdruck 'principle of cosmic lazyness' geprägt, also das 'Prinzip der kosmischen Faulheit'. Inwiefern ist das gerechtfertigt?
6. Beschaffen Sie sich irgendwie eine Kugel mit zwei aufgesetzten 'Hörnern' wie auf p.126 gezeichnet (notfalls nehmen Sie einfach zwei Trichter und zwei Röhren). Sie können dann mit langen, schmalen Papierstreifen (Typ Karneval), die Sie auf dieser Fläche abwickeln, die Raumzeit-Bahnen von unterschiedlich schnellen Objekten bestimmen, die quer durch die Erde fallen. Was bedeutet dabei die gesamte Länge des Papierstreifens ?
7. Lassen Sie im Modell zu **6.** auch noch einen Lichtstrahl durch den Tunnel ziehen. Sehen Sie deutlich, dass er etwas länger braucht, als es ein Beobachter im OFF erwarten würde? Das ist genau der Shapiro-Effekt, den wir in **I3** durchrechnen werden.
8. Schiessen Sie jetzt im Modell zu **6.** eine Rakete quer durch die Erde. Im Gegensatz zum Licht verkürzt sich bei der Rakete die Durchflugzeit dank der Gravitation!
9. Ein Gefühl für 'gerade Linien' auf krummen Oberflächen (sogenannte 'Geodäten') erhält man auch, wenn man eine Rolle Verbandstoff zum Beispiel um ein Fussgelenk abwickelt. Welchen Weg will die Stoffbahn 'selber' einschlagen? (Idee zu dieser Aufgabe von Hans Walsler)
10. Lesen Sie die ersten 156 Seiten von [33]. Der amerikanische Titel des Buches ist natürlich viel beeindruckender: "Black Holes & Time Warps. Einstein's Outrageous Legacy"
11. Für den Weg, den ein Lichtstrahl im Raum nimmt, gilt auch in der ART immer noch das Prinzip von Fermat! Überlegen Sie sich, was das für einen Lichtstrahl bedeutet, der nahe am Sonnenrand vorbeiziehen muss.
12. Geniessen Sie die beiden Bücher von Harald Fritzsch, in denen Newton, Einstein und ein Berner Physiker der Gegenwart in Dialogform die SRT und die ART darstellen. Newton zeigt dabei seinen brillanten und kritischen Verstand; er ist zwar bereit, dazuzulernen, aber man muss ihm gute Argumente dafür präsentieren. Einstein ist immer wieder beeindruckt, welchen Fortschritt die Experimentalphysik gemacht hat; dass die SRT und die ART bis heute nur bestätigt werden konnten erstaunt ihn aber kein bisschen ... [34] zur SRT und [35] zur ART



Nach der Bestätigung des von Einstein vorausgesagten Werts der Lichtablenkung am Sonnenrand durch Eddington wurde Einstein von der Presse praktisch über Nacht zu einer Berühmtheit ersten Ranges gemacht. Gelegentlich genoss er diese Rolle, meist war sie ihm aber nur lästig. Er hat das selber verschiedentlich kommentiert:

Zur Strafe für meine Autoritätsverachtung hat mich das Schicksal selber zu einer gemacht. [22-43]

Früher dachte ich nicht daran, dass jedes spontan geäußerte Wort aufgegriffen und fixiert werden könnte. Sonst hätte ich mich mehr ins Schneckenhaus verkrochen. [22-48]



The Spiral Galaxy M66 (NGC 3627)  
VLT MELIPAL/YEPUN + FORS1/FORS2

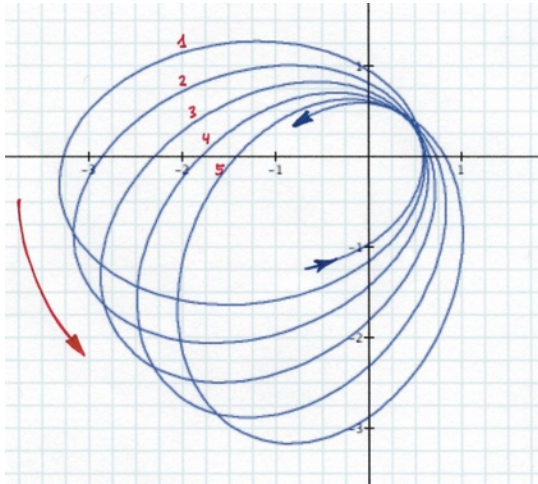
ESO PR Photo 33c/03 (19 December 2003)

© European Southern Observatory

# I Experimente zur Allgemeinen Relativitätstheorie

In diesem Abschnitt werden alte und neuere Beobachtungen und Experimente vorgestellt, welche innerhalb der Newton'schen Theorie keine Erklärung finden, hingegen von der ART mit grosser Präzision vorausgesagt werden. Bei einigen dieser Experimente wie der Lichtablenkung am Sonnenrand, der Laufzeitverzögerung im Experiment von Shapiro oder den direkten Messungen der Zeiteffekte mit Atomuhren können wir mit unseren Mitteln den zu erwartenden Effekt in guter Näherung berechnen. Bei der Periheldrehung des Merkurs können wir wenigstens die Grösse (oder besser die Kleinheit) des Effektes abschätzen. Bei gewissen anderen Experimenten müssen wir uns damit zufrieden geben, dass wir verstehen, dass da überhaupt ein Effekt zu erwarten ist.

## 11 Die Periheldrehung des Merkur



Zöge ein einziger Planet seine einsame Bahn um die Sonne, so müsste er dies nach Kepler und Newton exakt auf einer in sich geschlossenen Ellipse tun. Schon Newton hat erkannt, dass das im Sonnensystem nicht mehr der Fall ist, da die Planeten einander ebenfalls gravitativ beeinflussen. Eine exakte Lösung nur schon des 'Dreikörper-Problems' konnten aber auch grosse Leute wie Poincaré nicht finden (er ist dabei aber schon tief in das Gebiet eingedrungen, welches heute den Namen 'Chaostheorie' trägt). Numerisch-iterativ lassen sich heute die Bahnen aller Planeten mit hoher Präzision für lange Zeiträume berechnen. Es zeigt sich, dass sich die

Apsidenlinien (die Gerade durch den sonnennächsten und den sonnennächsten Punkt der Bahn) unter dem Einfluss der äusseren Planeten ganz langsam drehen, und zwar in derselben Richtung, in der die Planeten umlaufen. Daraus resultiert eine rosettenartige Bahn, wobei der Effekt in der Graphik stark übertrieben dargestellt ist. Diese numerischen Simulationen haben übrigens auch gezeigt, dass das Sonnensystem noch über sehr lange Zeiträume stabil bleiben wird [36-315ff].

Dabei klappt allerdings eine kleine Differenz zwischen den errechneten Werten für diese Periheldrehung und denjenigen, welche die beobachtende Astronomie gemessen hat. Die folgende Tabelle gibt die numerischen Werte in den Einheiten 'Bogensekunden pro Jahrhundert' an. Die Unschärfe der eingetragenen Werte kann der Spalte 'Differenz' entnommen werden:

Planet	$\eta$ berechnet	$\eta$ beobachtet	Differenz	Prognose ART
Merkur	532.08	575.19	$43.11 \pm 0.45$	43.03
Venus	13.2	21.6	$8.4 \pm 4.8$	8.6
Erde	1165	1170	$5 \pm 1.2$	3.8

Die Differenz zwischen dem berechneten und dem gemessenen Wert ist insbesondere beim Merkur so gross, dass sie nach einer Erklärung verlangt. Der französische Astronom Urbain Le Verrier, der 1845 aus den Bahnstörungen des Planeten Uranus die Existenz und die Position des neuen Planeten Neptun errechnet hat, postulierte daher 1859 die Existenz eines weiteren Planeten Vulkan, welcher seine Bahn noch näher bei der Sonne als Merkur ziehen sollte.

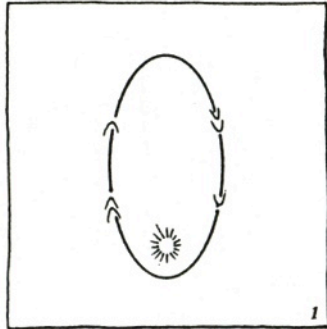
Die ART erklärt genau diese Differenz zwischen der Rechnung innerhalb der Newton'schen Theorie und der Beobachtung. Einstein war übergelückt, als er Ende 1915 ausrechnen konnte, dass seine neue Theorie für den Merkur eine *zusätzliche* Periheldrehung von gerade 43 Bogensekunden pro Jahrhundert prognostizierte! Er leitete die folgende Formel ab:

$$\Delta\varphi = 3 \cdot \pi \cdot \frac{R_s}{a \cdot (1 - \epsilon^2)}$$

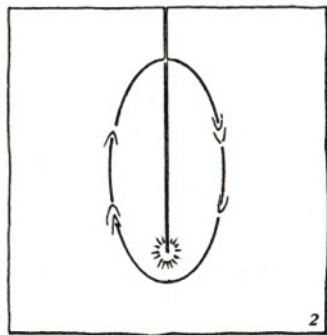
wo  $\Delta\varphi$  die zusätzliche Drehung pro Umlauf im Bogenmass,  $R_s$  der Schwarzschildradius der Sonne,  $a$  die Länge der grossen Halbachse der Planetenbahn und  $\epsilon$  deren numerische Exzentrizität bedeuten.

Der Effekt nimmt also mit zunehmendem Abstand  $a$  von der Sonne ab und ist bei stark elliptische Bahnen grösser als bei kreisförmigen. Daher drängt sich Merkur als Kandidat richtig auf. Kleine Exzentrizitäten wie bei der Venus schwächen nicht nur den Effekt, sondern machen es auch schwer, diese Periheldrehung zu beobachten. Die Werte in der letzten Spalte der Tabelle erhält man aus Einsteins Formel, wenn man deren Ergebnis mit der Anzahl Umläufe in 100 Jahren multipliziert und das Resultat noch aus dem Bogenmass in Winkelsekunden umrechnet (Aufgabe 1).

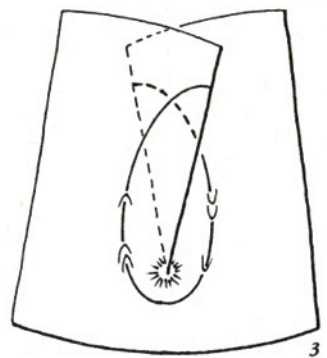
Dass dieser Effekt auftreten *muss* ergibt sich mit Epsteins 'Raumbeule' fast von selbst [10-213]:



In der ersten Zeichnung ist der Raum flach und der Planet zieht seine Ellipsenbahn, allerdings bei Epstein in unkonventioneller Richtung (sonst blickt man immer von Norden auf die Ekliptik). Soweit die Situation nach Newton.



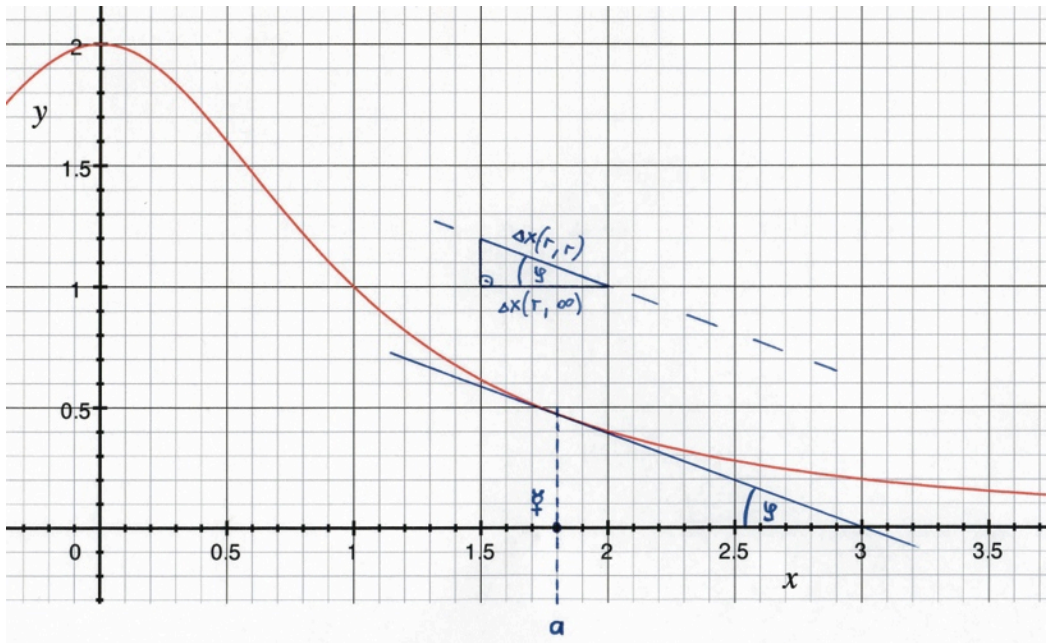
Nun schneiden wir die Ebene entlang der Apsidenlinie auf. Den Schnitt führen wir vom Aphelium bis zur Sonne.



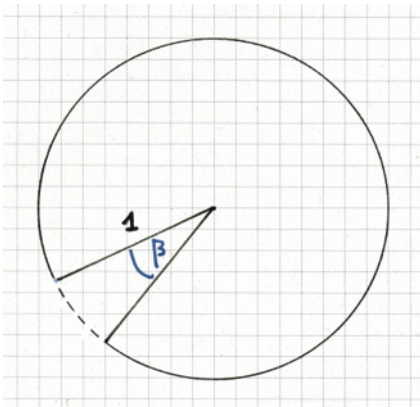
Wie im Abschnitt **H6** besprochen soll sich nun ein Kegel erheben mit der Spitze in der Sonne. Dazu müssen wir die Gebiete beidseits des Einschnitts etwas übereinander schieben (so bastelt man eben einen Kegel!). Das führt zwangsweise zu einem Voranschreiten des Apheliums in diejenige Richtung, in welcher der Planet umläuft!

Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein

Erstaunlicherweise ist es aber sogar möglich, aus Epsteins Pappmodell auch die Grössenordnung des Phänomens herauszuholen. Fast ohne Rechnung kommen wir der Formel erstaunlich nahe, für deren Herleitung Einstein sich mit elliptischen Integralen herumschlagen musste.



Die rote Funktion soll den Querschnitt durch Epsteins 'Raumbeule' darstellen. Die Zentralmasse sitzt im Nullpunkt, und mit zunehmendem Abstand  $x$  vom Nullpunkt wird die Raumkrümmung kleiner. Wenn unser Planet den mittleren Abstand  $a$  von der Zentralmasse hat, können wir dort die Raumbeule durch einen Kegel lokal approximieren. Den passenden Neigungswinkel  $\varphi$  zwischen der Mantellinie dieses Epstein-Kegels und der Ebene durch das Zentrum der Zentralmasse können wir für den Ort  $a$  des Planeten leicht bestimmen. Es ist  $\cos(\varphi) = \Delta x(r, \infty) / \Delta x(r, r) = 1 - \alpha / a$  nach G4. Hat der Kegel eine Mantellinie der Länge 1, so misst sein Grundkreisradius also  $(1 - \alpha / a)$ . Wir schneiden jetzt diesen Kegel entlang einer Mantellinie auf und drücken den Kegelmantel flach:



Wie gross ist der Winkel  $\beta$  des fehlenden Sektors?  $\beta / (2\pi)$  ist gleich dem Verhältnis der 'fehlenden' Bogenlänge zum ganzen Umfang, also

$$\beta / (2\pi) = [2\pi - 2\pi \cdot (1 - \alpha / a)] / (2\pi) = 1 - (1 - \alpha / a) = \alpha / a$$

Wir erhalten damit für  $\beta$  den Ausdruck

$$\beta = (2\pi) \cdot \alpha / a = \pi \cdot 2 \cdot \alpha / a = \pi \cdot R_s / a$$

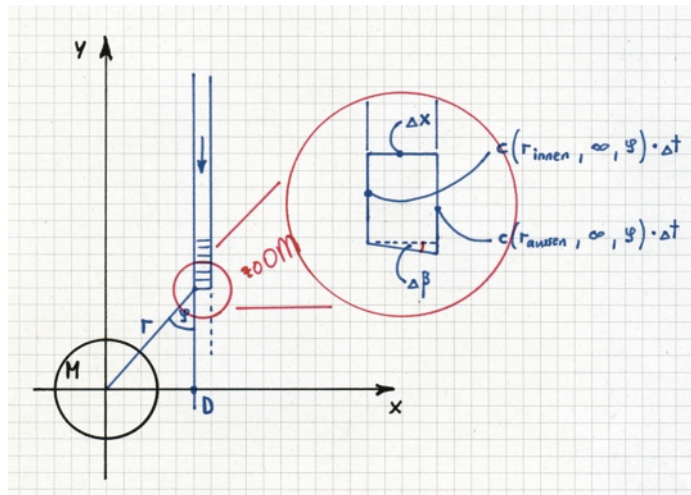
Richten wir den Kegel wieder auf, so wird ein Kreis oder eine Ellipse etwa um diesen Winkel  $\beta$  'überschoben',  $\beta$  gibt also gerade den Winkel an, um welchen die Ap-sidenlinie pro Umlauf voranschreitet.

Wir erhalten nur ein Drittel des korrekten Wertes (Formel p.134 unten). Das darf uns nicht grämen, wir haben ja nur den Einfluss der Raumkrümmung berücksichtigt, und auch dies mit sehr bescheidenen Mitteln. Von der Grössenordnung her liegen wir immerhin richtig!

## 12 Die Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne

Wir wollen nun dasjenige Experiment durchrechnen, dessen Ausgang Einstein 1919 so berühmt gemacht hat: Die Lichtablenkung am Sonnenrand. Die Wirkung auf die Öffentlichkeit respektive das Zeitungsgeschrei um dieses Resultat kann eigentlich nur vor dem Hintergrund der soeben beendeten Grosskatastrophe des Ersten Weltkrieges verstanden werden (siehe dazu [30-232ff] oder [37-191ff]). In **H6** haben wir schon betont, dass der Ausgang dieses Experimentes für die ART und gegen die Newton'sche Theorie spricht, welche für den Ablenkwinkel nur den halben Wert der ART erwarten lässt.

Wir machen den folgenden Ansatz: Ein Lichtstrahl der Breite  $\Delta x$  soll im Abstand  $D$  entlang der  $y$ -Richtung an der Sonne vorbeiziehen. Dabei kommt diejenige Seite des Strahls, welche auf der Innenbahn näher bei der Sonne liegt, nach unseren Formeln auf p.113 in **G5** ein klein bisschen langsamer voran als die Aussenseite, weshalb die Wellenfront um einen kleinen Winkel  $\Delta\beta$  abkippt:



Die Summe all dieser kleinen Richtungsänderungen  $\Delta\beta$  werden wir dann von  $y = +\infty$  bis  $y = -\infty$  aufintegrieren. Dabei setzen wir schon voraus, dass die gesamte Richtungsänderung klein ist. Im Prinzip ist das die Betrachtungsweise von 'Gravitation durch Brechung' !

### 1. Schritt

Wir bestimmen einen brauchbaren Ausdruck für die infinitesimale Richtungsänderung  $\Delta\beta$  :

$$\Delta\beta \approx \tan(\Delta\beta) = \frac{[c(x + \Delta x, y, \infty, \varphi) - c(x, y, \infty, \varphi)] \cdot \Delta t}{\Delta x} = \frac{c(x + \Delta x, y, \infty, \varphi) - c(x, y, \infty, \varphi)}{\Delta x} \cdot \Delta t$$

Wir müssen das über die  $y$ -Achse integrieren. Wenn wir schreiben ' $dy = c_0 \cdot dt$ ' machen wir keinen Fehler, auch wenn der Lichtstrahl (aus dem OFF betrachtet) nicht ganz mit  $c_0$  vorankommt. Das hat eigentlich nur zur Folge, dass unsere Zeitscheiben  $dt$  nicht alle gleich dick sind. Damit können wir aber insgesamt schreiben

$$d\beta \approx \frac{\partial(c(r, \infty, \varphi))}{\partial x} \cdot dt = \frac{\partial(c(r, \infty, \varphi))}{\partial x} \cdot \frac{1}{c_0} \cdot dy$$

Wenn wir also die partielle Ableitung der Lichtgeschwindigkeit nach  $x$  hätten, dann könnten wir unser Integral aufstellen:

$$\beta_{\text{total}} = \int_{+\infty}^{-\infty} d\beta \cdot dy = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\partial(c(r, \infty, \varphi))}{\partial x} \cdot \frac{1}{c_0} \cdot dy$$

## 2. Schritt

Wir bestimmen die partielle Ableitung von  $c(r, \infty, \varphi)$  nach  $x$ . Die Rechnung ist etwas mühsam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [c(r, \infty, \varphi)] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_0 \cdot \left( 1 - \frac{\alpha}{r} \cdot (1 + \cos^2(\varphi)) \right) \right] = \\ c_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ 1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r} \cdot \cos^2(\varphi) \right] &= c_0 \cdot (-\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \cdot \cos^2(\varphi) \right] = && \cos(\varphi) = y/r \\ c_0 \cdot (-\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{r} + \frac{y^2}{r^3} \right] &= c_0 \cdot (-\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{r^2 + y^2}{r^3} \right] = && r^2 = x^2 + y^2 \\ c_0 \cdot (-\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x^2 + y^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right] &= c_0 \cdot (-\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x^2 + 2 \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right] = && \text{jetzt endlich ableiten} \\ c_0 \cdot (-\alpha) \cdot \frac{(x^2 + y^2)^{3/2} \cdot 2x - (x^2 + 2 \cdot y^2) \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2 + y^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^3} &= && \text{durch } (x^2 + y^2)^{0.5} \\ c_0 \cdot (-\alpha) \cdot \frac{(x^2 + y^2) \cdot 2x - 3 \cdot (x^2 + 2 \cdot y^2) \cdot x}{(x^2 + y^2)^{2.5}} &= && \\ c_0 \cdot (-\alpha) \cdot \frac{2x^3 + 2xy^2 - 3x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^{2.5}} &= c_0 \cdot (-\alpha) \cdot \frac{-x^3 - 4xy^2}{(x^2 + y^2)^{2.5}} = && \\ c_0 \cdot \alpha \cdot \frac{x^3 + 4xy^2}{(x^2 + y^2)^{2.5}} &= c_0 \cdot \alpha \cdot \frac{x^3 + 4xy^2}{r^5} && r^2 = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

## 3. Schritt

Wir berechnen das Integral numerisch:

$$\begin{aligned} \beta_{\text{total}} &= \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\partial(c(r, \infty, \varphi))}{\partial x} \cdot \frac{1}{c_0} \cdot dy = \int_{+\infty}^{-\infty} c_0 \cdot \alpha \cdot \frac{x^3 + 4xy^2}{(x^2 + y^2)^{2.5}} \cdot \frac{1}{c_0} \cdot dy = \\ &= \alpha \cdot \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{x^3 + 4xy^2}{(x^2 + y^2)^{2.5}} \cdot dy = \alpha \cdot \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{D^3 + 4Dy^2}{(D^2 + y^2)^{2.5}} \cdot dy \end{aligned}$$

Auf unserem Lichtweg am Sonnenrand vorbei ist ja  $x = D = \text{konst.} = 2.33$  Lichtsekunden. Statt von  $+\infty$  bis  $-\infty$  können Sie auch z.B. von 2000 bis -2000 Lichtsekunden integrieren (die Erde ist etwa 500 Lichtsekunden weit weg von der Sonne). Dann muss noch beachtet werden, dass auch  $\alpha$  in diesen Einheiten eingesetzt werden muss:  $\alpha = G \cdot M / c^2 = G \cdot M \approx 4.9261 \cdot 10^{-6}$  Lichtsekunden!

Lassen Sie den Taschenrechner TI-89 dieses bestimmte Integral berechnen, dann liefert er Ihnen das Ergebnis  $8.4571 \cdot 10^{-6}$ . Das ist die gesamte Ablenkung  $\beta$  im Bogenmass. Rechnen wir noch in Bogensekunden um, so erhalten wir  $8.4571 \cdot 10^{-6} \cdot 180 \cdot 3600 / \pi \approx 1.74$  Bogensekunden.

Wenn wir Mathematica® mit der doppelten Stellenzahl rechnen lassen erhalten wir praktisch denselben Wert, nämlich 1.7518 Bogensekunden.

In [26-143] findet man für unser Integral die Stammfunktion  $(y/r + (y/r)^3) / D$ . Dass das stimmt können Sie durch Ableiten prüfen! Der Limes von  $y/r$  für  $y \rightarrow \infty$  ist aber einfach 1. Damit erhält man für die gesamte Ablenkung im Bogenmass die einfache Formel

$$\beta_{\text{total}} = \frac{4 \cdot \alpha}{D} = \frac{4 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot D} = \frac{2 \cdot R_s}{D}$$

Welche experimentellen Daten liegen nun vor, um diese Formel zu testen?

[26-145] präsentiert die Auswertungen von Sternfeldphotographien bei Sonnenfinsternissen bis 1952. Die Werte liegen zwischen 1.61" und 2.01", bei Unsicherheiten von 0.10 bis 0.45" (dabei habe ich die sogenannten 'Ausreisser' weggelassen). Das genügt zwar, um der ART den Vorzug zu geben gegenüber der Newton'schen Theorie, die Unsicherheit ist aber grösser als 10%. Im 'Telefonbuch' [27-1105] findet man Daten von Messungen mit Radioteleskopen. Die Sonne wandert - von der Erde aus gesehen - jedes Jahr am 8. Oktober vor dem Quasar 3C279 vorbei. In dessen Nähe liegt auch noch der Quasar 3C273, was eine präzise Messung des Winkels zwischen diesen beiden Objekten gestattet. 1970 konnte so die ART auf dem 5%-Niveau bestätigt werden. Neuere Messungen mit VLBI (very long baseline interferometry) konnten 1995 die ART mit einer Genauigkeit von  $0.9996 \pm 0.0017$ , also auf 1.7 Promille genau bestätigen. 1999 wurde eine Analyse von 2 Mio VLBI-Messungen publiziert, welche auf eine Genauigkeit von  $0.99992 \pm 0.00014$  kommen will. Diese Angaben sind der folgenden Website am 26. Dezember 2006 entnommen worden:

<http://relativity.livingreviews.org/open?pubNo=Irr-2001-4&page=node10.html>

Die Seite <http://relativity.livingreviews.org>, um die sich vor allem Clifford M. Will sehr verdient gemacht hat, liefert wohl die umfangreichsten und aktuellsten Informationen zur laufenden Forschung und den experimentellen Prüfungen im Bereich ART.

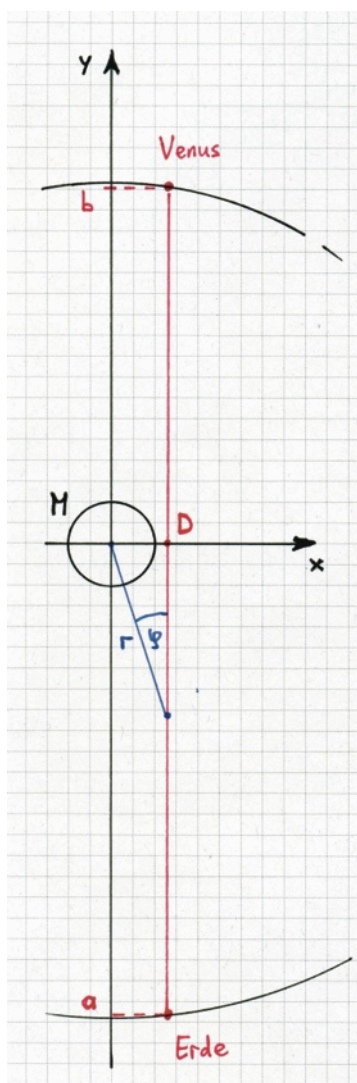
Eine andere Bestätigung dieser Vorhersage der ART kommt von den Daten des ESO-Satelliten Hipparcos. Dieser hatte die Aufgabe, die Position von 118'000 Sternen (bis zur Grössenklasse 12.5) hochgenau zu vermessen, damit sie nachher als Referenzsterne gebraucht werden können. Diese Aufgabe hat er (nach einem sehr unglücklichen Start, siehe Wikipedia) mit Bravour gelöst. Die Winkelauflösung der Positionsmessgeräte betrug dabei 0.001 Bogensekunden. Damit konnte er über den ganzen Himmel hinweg die Prognosen der ART mit einer Genauigkeit von etwa 0.3 % bestätigen. Der Effekt der Lichtablenkung ist nämlich schon messbar, wenn das Licht im Abstand einer Astronomischen Einheit, also von 150 Mio km, an der Sonne vorbei zieht! Wenn wir von der Erde aus in y-Richtung, also in eine Richtung blicken, die senkrecht steht auf dem Verbindungsstrahl Erde-Sonne, dann hat der Lichtstrahl genau die Hälfte der gesamten Ablenkung  $\beta$  schon erlitten.  $\beta = 2 \cdot R_s/D$  hat für  $D = 1$  AE den Wert 0.0081 Bogensekunden, und die Hälfte davon sind immer noch 4 Milli-Bogensekunden, also das Vierfache der Genauigkeit des Satelliten Hipparcos!



Oswald Huber  
NZZ am Sonntag  
12. Nov. 2006

### 13 Das Shapiro-Experiment

Ein Lichtstrahl, der nahe bei der Sonne vorbeiläuft, ändert seine Richtung nach **I2** kaum. Dagegen müsste doch die Zeit für das Durchlaufen eines Bahndurchmessers erheblich anwachsen, da das Licht nach den Formeln auf p.113 in **G5** in Sonnennähe langsamer vorankommt als es ohne Gravitationsfeld der Fall wäre. Die Aufgabe **5** von **H7** illustriert davon nur die Wirkung der Raumkrümmung, einen praktisch gleich grossen Anteil trägt auch die Krümmung der Raumzeit bei. Es geht also wieder um einen Effekt, der gut verstanden werden kann unter dem Gesichtspunkt 'Gravitation durch Brechung'.



Irwin Shapiro hat 1962 vorgeschlagen, diese Laufzeitverzögerung zu messen, indem man einige starke Radio-Signale zur Venus schickt, wenn sie sich in Opposition zur Erde befindet, und dann die Zeit bis zum Eintreffen der (extrem schwachen) reflektierten Signale misst.

Als 1964 die 120-Fuss-Haystack-Antenne in Westford/USA vom Militär dem MIT überlassen wurde, begann Shapiro mit seinem Team die Durchführung des Experimentes zu planen. Dieses fand erstmals vom November 1966 bis zum August 1967 statt. "It would have been nice to prove Einstein wrong" sagte Shapiro später. Das war ihm nicht vergönnt, bis 2006 haben alle Experimente zur Laufzeitverzögerung die ART innerhalb ihrer Messgenauigkeit bestätigt.

Shapiro konnte die Ungenauigkeit seiner Messungen von anfänglich über 3% in den Folgejahren auf unter 1% senken. Neuere Versionen dieses Versuches arbeiten mit Transpondern auf Raumsonden. Diese empfangen das Signal von der Erde und senden es mit einer genau bekannten Verzögerung wieder scharf und verstärkt zur Erde zurück. Mit der Viking-Marssonde konnten so 1979 die Voraussagen der ART zur Laufzeitverzögerung im Gravitationsfeld der Sonne mit einer Genauigkeit von 0.1% bestätigt werden. 2003 wurde mit der Raumsonde Cassini eine Genauigkeit von 0.0012% erreicht !

Ein Beobachter im OFF würde in der nebenan dargestellten Situation Werte von  $a = -498.67$  und  $b = 370.70$  messen (wie in **I2** rechnen wir alles in den Einheiten Lichtsekunden, es ist also  $c_0 = 1$  und  $\alpha \approx 4.9261 \cdot 10^{-6}$ ). Ohne Gravitation würde man eine Laufzeit von  $2 \cdot (b-a) / c_0 \approx 2 \cdot (370.70 + 498.67) / 1 \approx 1738.74$  Sekunden erwarten. Wir berechnen im folgenden die Differenz zu dieser Zeit, die entsteht, weil das Licht in der Nähe der Sonne etwas langsamer vorankommt.

Mit Gravitation beträgt die Laufzeit für beide Wege (mit  $c_0 = 1$  !)

$$T = 2 \cdot \int_a^b \frac{1}{c(r, \infty, \varphi)} \cdot dy = 2 \cdot \int_a^b \frac{1}{c_0 \cdot \left(1 - \left(1 + \cos^2(\varphi)\right) \cdot \alpha / r\right)} \cdot dy = 2 \cdot \int_a^b \frac{1}{1 - \left(1 + \cos^2(\varphi)\right) \cdot \alpha / r} \cdot dy$$

Dieses Integral ist numerisch sehr instabil. Eine Umformung gemäss  $1/(1-x) = (1+x)/(1-x^2)$  hilft weiter, weil wir dann im Nenner den sehr kleinen Term  $x^2$  streichen können:

$$T = 2 \cdot \int_a^b \frac{1 + (1 + \cos^2(\varphi)) \cdot \alpha / r}{1 - ((1 + \cos^2(\varphi)) \cdot \alpha / r)^2} \cdot dy \approx 2 \cdot \int_a^b 1 + (1 + \cos^2(\varphi)) \cdot \alpha / r \cdot dy = 2 \cdot \int_a^b 1 + \frac{\alpha \cdot (1 + \cos^2(\varphi))}{r} \cdot dy$$

Dies ist die Laufzeit hin und zurück mit Gravitation. Die *Differenz* zum erwarteten Wert ohne Gravitation ist damit

$$\Delta T = 2 \cdot \int_a^b \frac{\alpha \cdot (1 + \cos^2(\varphi))}{r} \cdot dy = 2 \cdot \alpha \cdot \int_a^b \frac{(1 + y^2 / r^2)}{r} \cdot dy = 2 \cdot \alpha \cdot \left[ \int_a^b \frac{1}{r} \cdot dy + \int_a^b \frac{y^2}{r^3} \cdot dy \right]$$

Dieses Integral ist sowohl numerisch als auch über eine Stammfunktion gut berechenbar. Für  $r$  ist dabei die Wurzel aus  $D^2 + y^2$  einzusetzen. Für einen Laufweg, der direkt am Sonnenrand vorbei führt, ist  $D \approx 2.33$ , und mit  $a = -499$  und  $b = 371$  liefert der Taschenrechner für die gesamte 'Verspätung' des Signals den Wert  $\Delta T \approx 213.3 \mu\text{s} \approx 0.000'213'3$  Sekunden - also einen leicht messbaren Wert.

Mithilfe einer Integraltafel oder eines Computer-Algebrasystems findet sich auch eine Stammfunktion:

$$\int \frac{1}{\sqrt{D^2 + y^2}} \cdot dy + \int \frac{y^2}{\sqrt{D^2 + y^2}^3} \cdot dy = 2 \cdot \ln\left(y + \sqrt{D^2 + y^2}\right) - \frac{y}{\sqrt{D^2 + y^2}}$$

Setzen wir hier die Integrationsgrenzen ein und verwenden wir die zusätzlichen Symbole

$a_V \sim$  Distanz Sonne-Venus,  $y_V \sim$  y-Koordinate der Venus,  $y_V > 0$

$a_E \sim$  Distanz Sonne-Erde,  $y_E \sim$  y-Koordinate der Erde,  $y_E < 0$

$\varphi_V \sim$  Winkel Sonne-Venus-Erde

$\varphi_E \sim$  Winkel Sonne-Erde-Venus

so erhalten wir den folgenden Ausdruck für die gesamte Laufzeitverzögerung, der auch für einen Strahlengang in grossem Abstand von der Sonne gute Werte liefert:



Die 120-Fuss-Radioantenne des MIT in Westford/USA, mit welcher das Shapiro-Experiment 1966/67 erstmals durchgeführt worden ist.

In der Oppositionsstellung sind die beiden Winkel  $\varphi_E$  und  $\varphi_V$  sehr klein und wir können für den Cosinus-Wert 1 einsetzen. Das liefert für diese spezielle Situation die einfachere Formel

$$\Delta T \approx 2 \cdot \alpha \cdot \left[ 2 \cdot \ln \left( \frac{a_V \cdot 2 \cdot a_E \cdot 2}{D^2} \right) - 1 - 1 \right] = 2 \cdot \alpha \cdot \left[ 2 \cdot \ln \left( \frac{4 \cdot a_V \cdot a_E}{D^2} \right) - 2 \cdot \ln(e) \right] = 2 \cdot \alpha \cdot \left[ 2 \cdot \ln \left( \frac{4 \cdot a_V \cdot a_E}{e \cdot D^2} \right) \right]$$

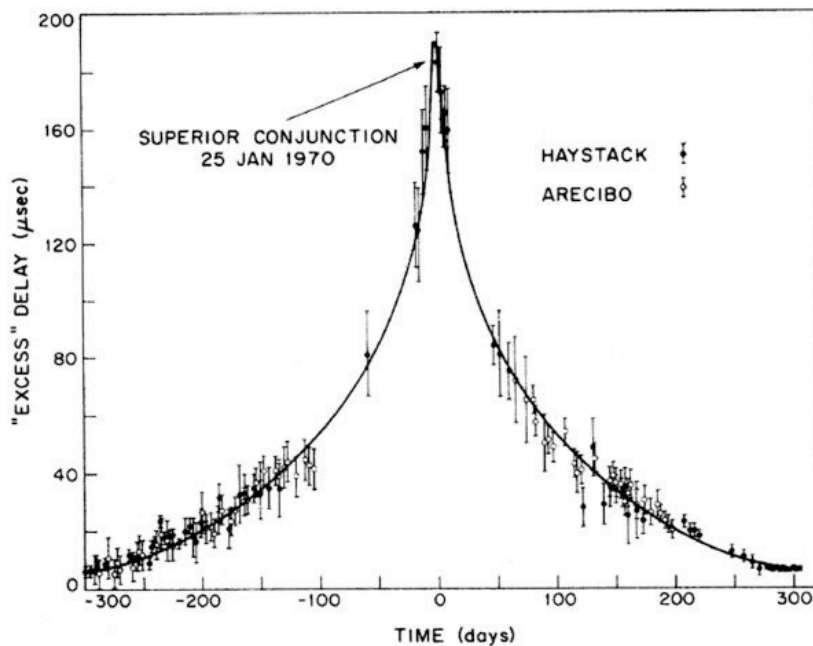
also  $\Delta T \approx 4 \cdot \alpha \cdot \ln \left( \frac{4 \cdot a_V \cdot a_E}{e \cdot D^2} \right)$

Auch diese vereinfachte Formel liefert für  $D = 2.33$  (Sonnenrand),  $a_E = 499$  und  $a_V = 371$  eine Laufzeitverzögerung von 213.3 Mikrosekunden.

Diese Werte  $\Delta T$  sind eigentlich für einen Beobachter im OFF gerechnet. Für Erdlinge müsste man das noch mit dem Faktor  $(1 - \alpha/r) \approx (1 - 4.9 \cdot 10^{-6} / 491)$  multiplizieren, weil auf der Erde die Uhren etwas langsamer laufen als im OFF. Diese Korrektur wirkt sich aber erst bei der achten Stelle aus und kann deshalb einfach weggelassen werden.

Für die Venus-Opposition vom 25. Januar 1970 liefert mir mein Astronomieprogramm die Werte  $D \approx 8.47$ ,  $a_E \approx 491$  und  $a_V \approx 363$

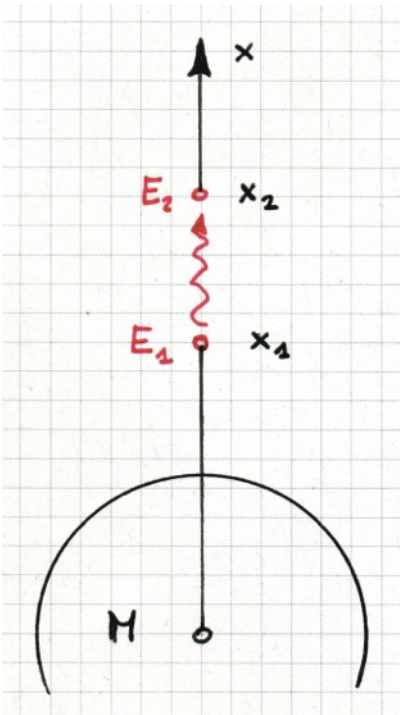
Setzt man das in unsere Formel ein, so erhält man eine Laufzeitverzögerung von 160.4 Mikrosekunden. Gemessen wurden von Shapiro jedoch maximal 180 Mikrosekunden. Bart Leplea meint in einer eMail, dass diese Diskrepanz auf den zusätzlichen Laufweg der effektiv leicht gekrümmten Bahn zurückzuführen sei.



Der Shapiro-Effekt ist auch deshalb interessant, weil er mit zunehmendem Abstand  $D$  von der Zentralmasse nur langsam abnimmt. Die Lichtablenkung ist gemäss der Formel auf p.138 proportional zu  $1/D$ . Die Laufzeitverzögerung ist hingegen im wesentlichen proportional zu  $1/\ln(D)$ , wie wir der Formel auf p.141 entnehmen können. Im Abstand von 100 Sonnenradien sinkt der Wert der Lichtablenkung auf 1%, die Laufzeitverzögerung hat aber dort immer noch eine Stärke von 21% des maximalen Effekts am Sonnenrand. Man spricht daher auch von einem 'long-range-effect'.

## 14 Das Experiment von Rebka und Pound

Wir haben schon auf p.108 in **G4** gehört, dass Schwarzschild ab 1913 versucht hat, eine 'Rotverschiebung' von Absorptionslinien im Spektrum der Sonne nachzuweisen. Einstein hat gehofft, hier eine erste experimentelle Bestätigung seiner Theorie zu erhalten. Dabei hätte der Nachweis eigentlich gar nicht speziell die ART bestätigt, sondern nur den Energieerhaltungssatz:



Fliegt ein Photon von  $x_1$  nach  $x_2$ , so nimmt seine potentielle Energie zu und es muss deshalb ein bisschen von seiner inneren Energie  $E_1 = h \cdot f_1$  abgeben (mit  $h$  wird die Planck'sche Konstante bezeichnet). Am Ort  $x_2$  hat es die kleinere Energie  $E_2 = h \cdot f_2$ , die Frequenz der Strahlung ist also etwas kleiner und die Wellenlänge entsprechend der Formel  $c = f \cdot \lambda$  etwas grösser geworden. Die Wellenlänge verschiebt sich damit in Richtung des roten, langwelligen Endes des optischen Spektrums, woher der Name 'Rotverschiebung' kommt. Für einen kleinen Aufstieg des Photons von  $x_1$  nach  $x_2$  gilt

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{pot}} &\approx \frac{E_1}{c^2} \cdot G \cdot M \cdot \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = h \cdot f_1 \cdot \frac{G \cdot M}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \\ &= h \cdot \alpha \cdot f_1 \cdot \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = h \cdot \alpha \cdot f_1 \cdot \left( \frac{x_1 - x_2}{x_2 \cdot x_1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{nebst } \Delta E_{\text{pot}} = -\Delta E = -h \cdot (f_1 - f_2)$$

Setzen wir das zusammen, so erhalten wir

$$h \cdot (f_1 - f_2) = h \cdot \alpha \cdot f_1 \cdot \left( \frac{x_1 - x_2}{x_2 \cdot x_1} \right)$$

$$\text{oder } \frac{\Delta f}{f} = \alpha \cdot \left( \frac{x_1 - x_2}{x_2 \cdot x_1} \right) = \frac{G \cdot M}{c^2} \cdot \left( \frac{x_1 - x_2}{x_2 \cdot x_1} \right)$$

Für ganz kleine Hübe an der Erdoberfläche lässt sich das weiter vereinfachen: Dann ist  $x_1 \cdot x_2 = r_E^2$ , für  $x_1 - x_2$  schreiben wir  $\Delta x$  und  $G \cdot M / r_E^2$  ist einfach die Fallbeschleunigung  $g$  an der Erdoberfläche. Damit erhalten wir die Formel

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{G \cdot M}{c^2} \cdot \left( \frac{\Delta x}{r_E^2} \right) = \frac{g \cdot \Delta x}{c^2}$$

Dieses Ergebnis haben wir - mit einer anderen Begründung - schon einmal auf p.111 in **G4** hergeleitet! Dort haben wir auch ausgerechnet, dass wir bei einem Höhenunterschied  $\Delta x$  von 22.6 Meter einen Quotienten  $\Delta f / f$  im Bereich von  $10^{-15}$  haben.

Den beiden amerikanischen Physikern R.V. Pound und G.A. Rebka ist es 1960 gelungen, diesen winzigen Effekt mit einer Genauigkeit von etwa 10 % experimentell zu messen. 1964 konnten dann Pound und J.L. Snider die Genauigkeit auf 1% steigern. Sie benutzten dabei die extrem scharfen Spektrallinien von radioaktiven Kobaltatomen, die dank ihrer Einbettung in ein Kristallgitter von Eisenatomen praktisch rückstossfrei emittieren und absorbieren (Stichwort Mössbauer-Effekt). Die Höhendifferenz von 22.6 Metern genügte, um Quelle und Absorber so zu 'verstimmen', dass sie nicht mehr in Resonanz waren. Mit einer Spindel wurde dann der Absorber so 'schnell' (einige Millimeter pro Stunde! → Aufgabe 9) auf die Quelle zu oder von ihr wegbewegt, bis er sich wegen des Dopplereffektes wieder in Resonanz mit der Quelle befand. Die für die maximale Resonanz nötige Vorschubgeschwindigkeit war dann das Mass für die Frequenzverschiebung  $\Delta f$  !

## 15 Hafele und Keating reisen um die Welt

Etwa um 1960 war die Genauigkeit der Cäsium-Atomuhren so gross, dass man daran denken konnte, die Effekte der SRT und der ART mit solchen Uhren direkt zu prüfen. Während andere Experimente mit Satelliten planten, bereiteten J. Hafele und R. Keating in aller Stille die Durchführung eines derartigen Tests mit gewöhnlichen Linienflugzeugen vor. Im Oktober 1971 flogen sie - einmal in Ostrichtung und ein zweites Mal in westlicher Richtung - um die Welt. Zusammen mit den 4 Atomuhren belegten die beiden 4 Plätze erster Klasse. Während des Flugs zeichneten sie laufend Flughöhe, Fluggeschwindigkeit und Flugrichtung auf.

Die ART verlangt, dass die Uhren in grösserer Höhe schneller laufen als identische Vergleichsuhren am Boden. Die SRT verlangt, dass für ruhende Uhren mehr Zeit verstreicht als für bewegte. Dabei muss man sich aber auf ein Inertialsystem beziehen, und ein solches ist die rotierende Erde nicht! Die Vergleichsuhren am Boden haben infolge der Erdrotation schon eine erhebliche Geschwindigkeit (wenn sie sich nicht am Nordpol befinden ...). Zu dieser Geschwindigkeit muss beim Ostflug die Geschwindigkeit des Flugzeuges addiert werden. Beim Westflug muss diese jedoch subtrahiert werden, was nach aufwendigen Auswertungen zu den folgenden erwarteten Zeitunterschieden gegenüber den 'zu Hause gebliebenen' Uhren führte:

Erwarteter Effekt	Ostflug	Westflug
ART (Gravitation)	+ 144 ± 14 ns	+ 179 ± 18 ns
SRT (Geschwindigkeit)	- 184 ± 18 ns	+ 96 ± 18 ns
Total	- 40 ± 23 ns	+ 275 ± 21 ns

Gemessen wurden von Hafele und Keating beim Westflug + 273 ± 7 Nanosekunden in schon fast verdächtig guter Übereinstimmung mit dem erwarteten Wert. Beim Ostflug tanzte die Uhr mit der Seriennummer 361 mit ihren - 74 Nanosekunden etwas aus der Reihe, die anderen drei Uhren lagen mit - 51 bis - 57 ns nahe beisammen. Der Mittelwert aller vier Uhren lag bei - 59 ± 10 Nanosekunden.

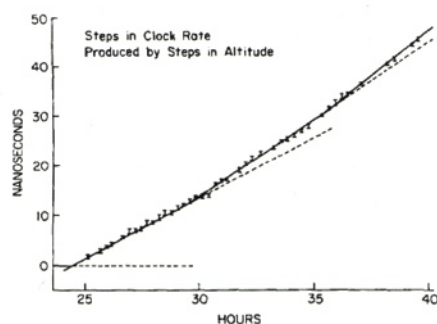
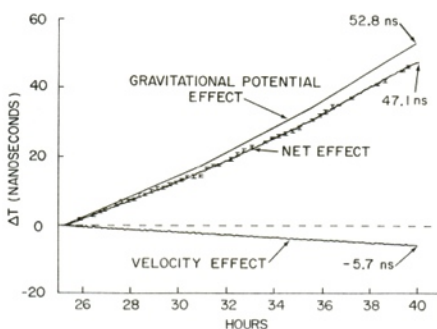
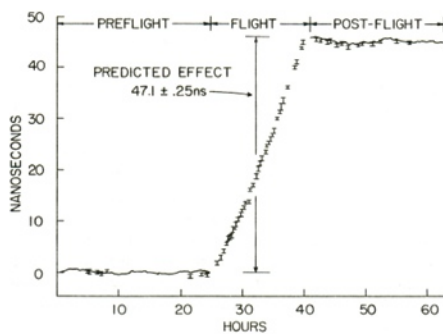
Besonders schön an diesem Experiment ist erstens, dass man die Effekte von SRT und ART in einem gewissen Sinn trennen kann, obwohl eine Uhr ja immer nur die Gesamtwirkung misst. Zweitens ist es einfach gerissen, wie die beiden mit minimalsten Mitteln den anderen mit ihren aufwendigen Satellitenexperimenten die Show gestohlen haben. Das hat auch einige Leute verstimmt; man kann das Experiment von Hafele und Keating auch 'ergooglen', indem man als Suchwort 'wissenschaftliches lausbubenstück' eingibt. Diese Redewendung stammt wohl aus [38-24].

Hafele und Keating konnten die Prognosen von ART und SRT mit einer Genauigkeit von etwa 9% bestätigen. Eine deutliche Steigerung wurde beim Experiment von Maryland erzielt, welches wir im nächsten Abschnitt 16 besprechen. Mit einem Raketenflug eines Wasserstoff-Masers, der als Uhr diente, erreichten R.F.C. Vessot und M.W. Levine nach mehrjähriger Auswertung der Messdaten 1979 ein Endergebnis, welches eine Unsicherheit von ± 0.02% aufwies und innerhalb dieser Grenzen mit den Vorhersagen von SRT und ART übereinstimmte. Dieser Raketenflug wird neuerdings mit 'Gravity Probe A' bezeichnet (18). Heute laufen diese Uhrenexperimente sozusagen in der umgekehrten Richtung: Man setzt voraus, dass die Atomuhren in den GPS-Satelliten gemäss SRT und ART 'falsch' laufen, korrigiert die Zeitsignale entsprechend und errechnet sich aus den präzisen Bahndaten und den korrigierten Signalen von vier derartigen Satelliten 3d-Positionen nahe der Erdoberfläche auf einige Millimeter genau (17).

## 16 Das Maryland-Experiment

Eine Forschergruppe der Universität von Maryland (USA) führte den Versuch von Hafele und Keating sozusagen seriös durch. Anstelle gewöhnlicher Verkehrsflugzeuge auf nicht genau bekannten Kursen wurde ein Flugzeug der US-Navy verwendet, dessen Kurs während des ganzen Fluges sehr genau aufgezeichnet wurde. Dieses Flugzeug konnte bis zu 15 Stunden seine Runden drehen und bis in eine Höhe von 35'000 Fuss aufsteigen. Dabei wurde schon während des Fluges die Zeit der drei Atomuhren an Bord mit derjenigen der drei Uhren derselben Bauart am Boden verglichen, indem ständig Laserpulse mit einer Pulsbreite von 0.1 ns ausgetauscht wurden. Die drei fliegenden Uhren wurden sorgfältig gegen Erschütterungen, Temperaturschwankungen, Druck-unterschiede und Einflüsse des Magnetfeldes abgeschirmt, und die baubedingten Differenzen zwischen den beteiligten 6 Atomuhren wurden vor, zwischen und nach den Flügen genau ausgemessen und rechnerisch korrigiert.

Nach mehreren Testflügen wurden fünf Hauptflüge mit einer Flugzeit von je 15 Stunden durchgeführt und ausgewertet. Die (korrigierten) Uhren gingen vor, zwischen und nach den Flügen alle gleich schnell, während der Testflüge akkumulierte sich aber eine Gangdifferenz, welche genau den Erwartungen nach SRT und ART entsprach. Die folgenden Plots stammen vom zweiten der fünf Flüge, der am 22. November 1975 stattgefunden hat.



Die mittlere Graphik zeigt mit gespreizter Zeit-skala eigentlich dasselbe wie die oberste, zusätzlich sind aber die errechneten Einflüsse nach SRT und ART eingezeichnet. Da die Flug-geschwindigkeit (ausser bei den relativ kurzen Phasen bei Start und Landung) weitgehend konstant (und möglichst klein !) gehalten wurde, zeigt sich der 'Velocity Effect' praktisch als Gerade. Beim Einfluss des Gravitationspotentials sieht man schon beim mittleren Bild deutlich Knickstellen. Sie rühren daher, dass das Flugzeug zuerst 5 Stunden auf 25'000 Fuss Höhe fliegen musste, bevor es genug Sprit losgeworden war, um auf die nächste Höhe von 30'000 Fuss aufzusteigen. Nach weiteren 5 Stunden war es dann leicht genug, um auf die maximal zugelassene Gipfelhöhe von 35'000 Fuss zu klettern. Diese 'Höhenstufen' sind in der dritten Graphik unten noch besonders hervorgehoben.

C.O. Alley konnte mit seinem Team die Prognosen von SRT und ART insgesamt mit einer Genauigkeit von etwa 1.6 % bestätigen. Ein schöner Übersichtsbericht zu diesem Experiment stammt von Alley selber [39]. Diesem Bericht sind auch die Graphiken auf dieser Seite entnommen.

## 17 GPS, LRS und Relativitätstheorie

Die Atomuhren wurden nach ihrer Einführung in den 50er Jahren schnell genauer und kleiner. So ist es 2003 gelungen, eine Rubidium-Atomuhr zu bauen, die noch ein Volumen von  $40 \text{ cm}^3$  einnimmt und eine Leistung von 1 Watt verbraucht, und dies bei einer Ganggenauigkeit von  $3 \cdot 10^{-12}$  ! Pierre Thomann vom Observatorium Neuenburg und Gregor Duddle vom Bundesamt für Metrologie und Akkreditierung in Bern konnten ebenfalls 2003 die Genauigkeit der Standard-Cäsium-Uhren durch eine spezielle Kühltechnik um einen weiteren Faktor 40 auf  $1 \cdot 10^{-15}$  steigern.

Ab 1958 begann das US-Militär, diese Uhren, die Fortschritte in der Elektronik und die Satellitentechnik zu einem weltweit funktionierenden Positionserkennungssystem (GPS) zu kombinieren. Das erste funktionierende System TRANSIT wurde ab 1964 eingesetzt und hatte vor allem die Funktion, Raketen von U-Booten zu ihrem Ziel zu führen. Viel bekannter wurde das System NAVSTAR, welches am 17. Juli 1995 offiziell in Betrieb genommen wurde und auch zivil genutzt werden kann. 24 Satelliten kreisen auf gut bekannten Bahnen zweimal pro Tag um die Erde und senden dabei laufend Zeitsignale aus. Kleine und billige Empfänger können aus den winzigen Laufzeit-Differenzen der Signale von mindestens 4 solcher Satelliten die eigene Position (und die Zeit ... vier Messwerte bestimmen die vier Unbekannten) auf wenige Meter genau bestimmen. Wir erinnern uns: 1 Nanosekunde entspricht einem Weg von 30 Zentimetern. Hätte der Empfänger selber eine hochgenaue Uhr, so würden zwei oder drei Satelliten reichen für eine Ortsbestimmung mit einer Genauigkeit von wenigen Zentimetern. Die Unschärfe würde dann vor allem von der nicht genau bekannten Flugbahn der Satelliten stammen. An diesem Punkt arbeitet eine kleine Gruppe der Universität Bern an vorderster Front mit: In Zimmerwald werden Laserpulse zu den eigens für diesen Zweck angebrachten Reflektoren an den Satelliten geschickt. Aus der Laufzeit der wenigen Photonen, die vom reflektierten Signal eingefangen werden können, wird dann die Bahn des Satelliten zentimetergenau bestimmt. Diese genauen Bahndaten erlauben es in den folgenden Tagen, die Signale der GPS-Satelliten mit spezieller Software der Universität Bern so auszuwerten, dass die erreichte Genauigkeit für Vermessungszwecke ausreicht. Auf diese Weise kann man heute die Faltung der Alpen, die Drift der Kontinente oder die Gezeiten des Festlandes direkt messen ! LRS (Laser Ranging Systems) gibt es auch in Deutschland, und zwar in Potsdam und im Bayrischen Wettzell. Diese Bodenstationen arbeiten alle weltweit zusammen ( <http://ilrs.gsfc.nasa.gov/> ).

Die ehemalige Sowjetunion hat ebenfalls ein militärisch kontrolliertes Satelliten-Navigationssystem gebaut (GLONASS). Die Europäische Raumfahrtorganisation ESA ist dabei, ein eigenes, zivil kontrolliertes System aufzubauen (GALILEO). Die ersten Satelliten sind bereits im All (der Start durfte vor allem deshalb nicht weiter verschoben werden, da die ESA sonst die reservierten Frequenzbereiche verloren hätte ...). Neben den Mitgliederstaaten der ESA beteiligen sich auch die VR China, Indien, Kanada und Israel an diesem Projekt. Die Uhren für die Galileo-Satelliten sind übrigens im oben erwähnten Neuenburger Institut entwickelt worden.

Alle diese satellitengestützten Navigationssysteme würden ohne die Berücksichtigung von SRT und ART nie funktionieren. Dabei sind sowohl die Korrekturen der SRT als auch diejenigen der ART keineswegs konstant über einen ganzen Erdumlauf, da ja die Bahnen der Satelliten immer leicht elliptisch sind. Damit schwanken sowohl die Flughöhe als auch die Relativgeschwindigkeit so stark, dass das für hochpräzise Positionsbestimmungen (auf wenige Millimeter genau) berücksichtigt werden muss. Die Einflüsse sind genau diejenigen, die wir schon in **I5** und **I6** besprochen haben.

Da diese Global Positioning Systems alle schon in die www-Zeit fallen, finden Sie dazu eine Fülle an Beschreibungen und Illustrationen im Netz. Auch das unerlässliche 'Gegenstück', die LRS, sind im Netz gut dokumentiert. In der Öffentlichkeit ist dieser Teil aber viel weniger bekannt.



Die unscheinbare Anlage des astronomischen Instituts der Universität Bern in Zimmerwald.  
Weblink: <http://www.aiub.unibe.ch/slr.html> (Jan 2007)

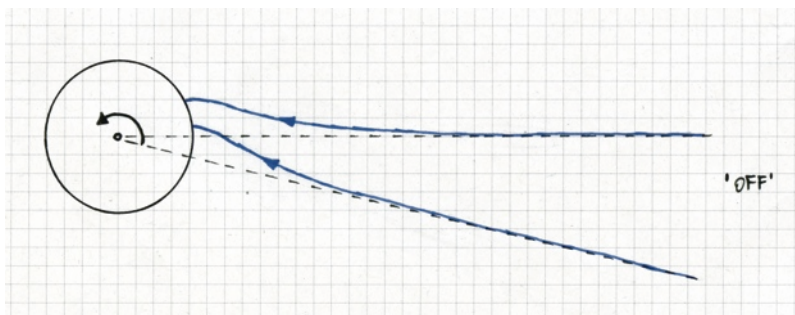


Das Herz der Anlage in Zimmerwald: Ein Laser, der zehn sehr intensive und scharfe Pulse pro Sekunde liefert, die dann über ein kleines Teleskop (siehe oberes Bild) zum Reflektor auf einem Satelliten geschickt werden. Dazu muss die ungefähre Position des Satelliten natürlich schon bekannt sein. Diejenigen Photonen, die innerhalb des richtigen engen Zeitfensters eintreffen und auch noch die richtige Wellenlänge haben, werden als reflektiertes Signal erkannt und dienen zur Bestimmung der Laufzeit mit einer Genauigkeit im Bereich von 0.1 Nanosekunden.

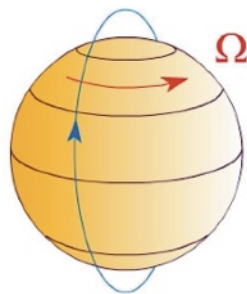
(beide Bilder auf dieser Seite sind handgeknipst vom Autor)

## 18 Der Einstein-Thirring-Lense-Effekt

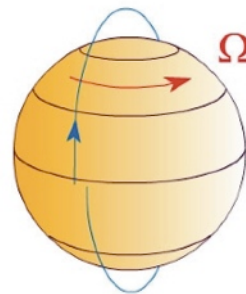
Newtons Versuch mit dem aufgehängten Wassereimer scheint ja zu zeigen, dass das Wasser im Eimer weiss, ob es rotiert oder nicht. Ernst Mach hat 1883 Newtons Folgerung, dass ein absoluter Raum existiere, kritisiert und verlangt, dass rotierende Massen Inertialsysteme in ihrer Nähe beeinflussen müssten. Die beiden österreichischen Physiker Hans Thirring und Joseph Lense haben 1918 gezeigt, dass Einsteins ART dieses Problem löst: Rotierende Massen ziehen die Metrik der Raumzeit ein bisschen mit, verdrillen diese ein wenig oder erzeugen im Extremfall eine wirbelähnliche Struktur in der Raumzeit. Ein aus dem OFF frei fallendes Objekt bewegt sich daher nicht mehr 'geradlinig' auf das Zentrum einer kugelförmigen Zentralmasse zu, wenn diese rotiert:



Dieses 'Mitziehen' des Raumes (englischer Suchbegriff 'frame dragging') müsste sich bei einem Satelliten, der die Erde auf einer polaren Bahn umrundet, in einer kleinen Drehung der Bahnebene bemerkbar machen:



nach Newton



nach Einstein-Thirring-Lense

(Diese Graphik ist der ausgezeichneten Präsentation von Franz Embacher zum Thirring-Lense-Effekt entnommen, die bei <http://homepage.univie.ac.at/Franz.Embacher/Rel/> heruntergeladen werden kann. Diese Seite ist ohnehin eine wahre Schatzkammer !)

Im Oktober 2004 haben I. Ciufolini und E.C. Pavlis von der Universität Lecce ihre Analyse [40] der Bahndaten zweier Satelliten (LAGEOS und LAGEOS 2) vorgelegt. Diese Satelliten wurden eigens als Zielobjekte fürs Laser Ranging (siehe 17) gestartet. Aus den Schwankungen und Unregelmäßigkeiten in den Bahnen haben die Geologen viele Informationen über die Feinstruktur des Gravitationsfeldes resp. über die Dichteverteilung im Erdinnern gewonnen. Ciufolini und Pavlis haben mit enormem Aufwand versucht, alle anderen Einflüsse auf die Bahnen dieser Satelliten (zum Beispiel den Strahlungsdruck der Sonne !) rechnerisch zu eliminieren, um schliesslich die winzigen 31 Millibogensekunden pro Jahr des Thirring-Lense-Effektes zu isolieren. Sie meinen, dass ihnen dies mit einer Genauigkeit von etwa  $\pm 10\%$  gelungen sei.

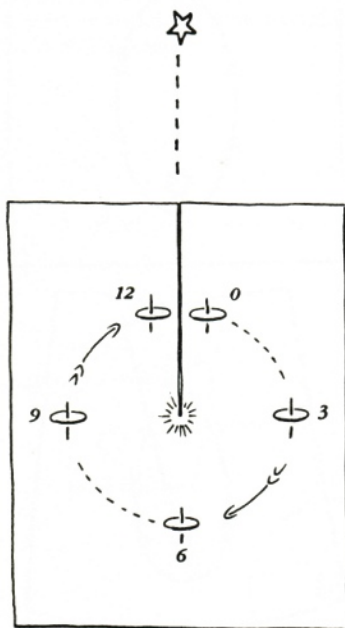
Wissenschaftler der NASA und der Stanford University wollten diesen Effekt mit dem Satelliten 'Gravity Probe B' mit einer anderen Methode auf 1% genau messen. Sie finden ausführliche Informationen dazu im Internet; es ist faszinierend, wie dieses Experiment wieder einmal die Grenzen des technisch Machbaren auszuloten versuchte!

Gravity Probe B arbeitete mit vier Kreiseln aus hochpräzise geschliffenen Quarzkugeln. Die Änderungen der Rotationsachsen wurden relativ zum Satelliten bestimmt. Dieser wurde mit einem kleinen Teleskop so stabil wie möglich auf den Stern HR 8703 im Sternbild Pegasus ausgerichtet, dessen Eigenbewegung sehr gut bekannt ist. Dabei sollten gleichzeitig zwei Effekte gemessen werden:

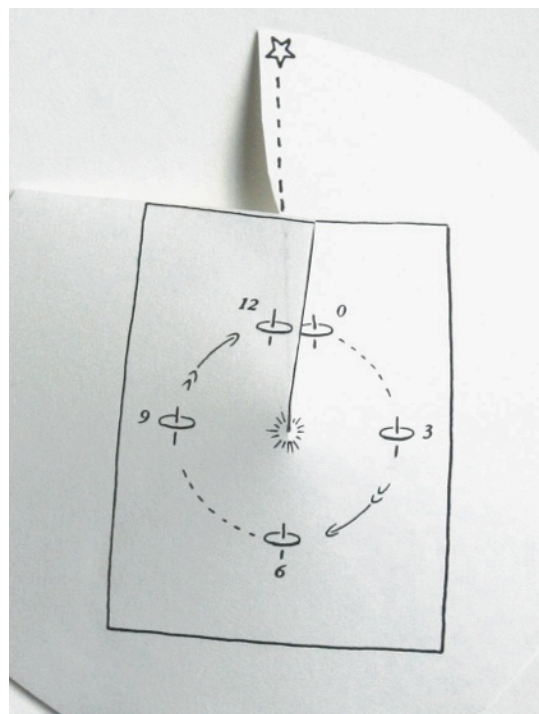
1. Der 'geodätische' Effekt, den wir in I1 als Periheldrehung vor allem beim Merkur kennengelernt haben. Er besteht in einem Abkippen der Kreiselachse *in* der Bahnebene und sollte etwa 6.6 Bogensekunden betragen. Die Messgenauigkeit von Gravity Probe B sollte hier besser als 0.01% sein.
2. Der Thirring-Lense-Effekt, der ein Abkippen der Kreiselachse *senkrecht* zur Bahnebene bewirkt und etwa 0.041 Bogensekunden betragen sollte. Dieser Effekt hätte mit einer Genauigkeit von etwa 1% gemessen werden sollen.

Das Experiment muss leider als gescheitert bezeichnet werden. Elektrostatische Aufladungen beim 'Anblasen' der Gyroskop-Kugeln haben die Messwerte derart verrauscht, dass der vor allem interessierende Punkt 2 nur sehr vage gemessen werden konnte. Wäre Einsteins ART auf dem 1%-Niveau bestätigt worden, so hätte das das Ende einiger konkurrierender Theorien bedeutet.

Den geodätischen Effekt können wir mit Epstein [10-214f] schön illustrieren. Wir wiederholen einfach die Idee von p.135 und zeichnen zusätzlich Kreiselachsen ein. Links haben wir Newtons 'flache' Welt, in welcher die Kreiselachse ihre Richtung absolut beibehält, im gekrümmten Raum der ART rechts ist die Kreiselachse nach einem Umlauf um einen kleinen Winkel abgekippt:

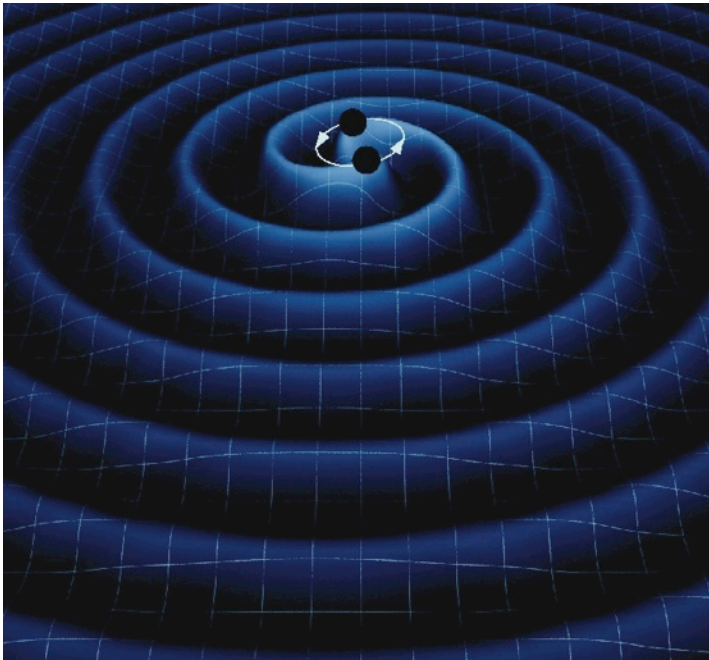


Copyright © Insight Press, Lewis Carroll Epstein



## 19 Gravitationswellen

Problematisch an Newtons Gravitationstheorie ist ja insbesondere auch die *sofortige* Ausbreitung des Gravitationsfeldes. Verschieben wir eine Masse schnell um ein paar Meter, dann ist die entsprechende Auswirkung sofort überall in der ganzen Milchstrasse vorhanden. In Newtons Kraftgesetz taucht ja die Zeit gar nicht auf! Verschieben wir eine Masse periodisch hin und her, so erzeugt das in beliebigen Distanzen sofort Kräfte, die eine kleine Probemasse zu Schwingungen anregen. Mit einer Änderung des Gravitationsfeldes ist also eine instantane Energie- und Informationsübertragung verbunden. Das Kausalitätsprinzip und die SRT setzen aber jeder Informationsübertragung mit der Lichtgeschwindigkeit eine obere Grenze.

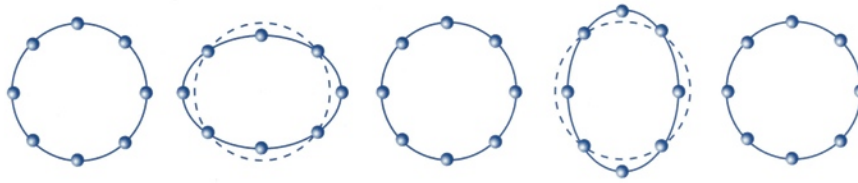


Einstein hat 1918 gezeigt, dass sich Änderungen in Massenverteilungen und damit deren Auswirkungen auf die Struktur der Raumzeit gemäss ART gerade mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Zwei schnell umeinander kreisende massereiche Objekte sollten demnach Gravitationswellen aussenden, die sich mit  $c$  durch den Raum fortpflanzen.

Diese Visualisierung einer Gravitationswelle stammt von der Seite <http://lisa.jpl.nasa.gov/gallery/>

Allerdings sind die Wirkungen dieser 'Störungen' in der Struktur der Raumzeit auch bei den intensivsten Quellen ausserordentlich klein. 1987 wurde in der Grossen Magellan'schen Wolke, einer kleinen Begleitgalaxie unserer Milchstrasse, die Explosion einer Supernova beobachtet (die Explosion hat aber schon 160'000 Jahre früher stattgefunden ...). Der 'Gravitationswellenblitz' musste damals hundertmal so intensiv gewesen sein wie die Strahlungsleistung der Sonne auf der Erde. Dennoch hat das nur gereicht, um die Distanz Erde-Sonne um einige Atomdurchmesser grösser und kleiner werden zu lassen! Die Längenänderungen in den viel kürzeren 'Armen' der existierenden Detektoren für solche Signale (300 m bei TAMA300, 600 m bei GEO600, 3 km bei VIRGO und 4 km bei LIGO) sind entsprechend kleiner. Es ist noch nicht erwiesen, dass mit diesen Anlagen überhaupt solche Effekte nachgewiesen werden können. Seit Anfang 2006 wartet man auf die ersten Signale. Dabei ist man auf die Zusammenarbeit mehrerer Detektoren angewiesen: In dem enormen Grundrauschen hat man erst dann mit einiger Sicherheit ein Signal gefunden, wenn es gleichzeitig von mehreren, weit auseinanderliegenden Detektoren registriert worden ist.

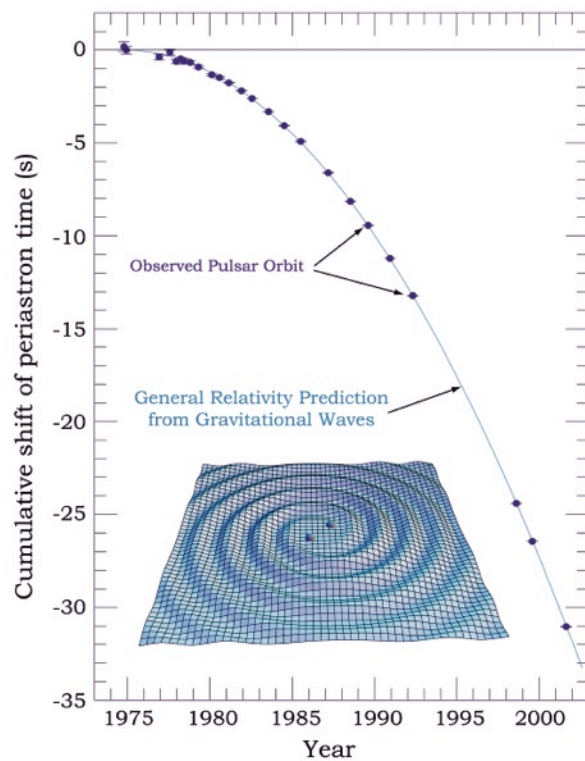
Grössere Chancen, je ein Signal zu registrieren, haben satellitengestützte Projekte wie LISA, da die Empfänger kaum mehr terrestrischen Störungen ausgesetzt sind und da die Armlängen der Detektoren Zehntausende von Kilometern betragen können. Weitere Informationen dazu findet man auf der oben erwähnten Web-Adresse.



Die erdgebundenen Detektoren weisen alle zwei zueinander senkrecht stehende Arme auf. Gravitationswellen sind nämlich Quadrupol-Wellen: Fällt eine solche Welle senkrecht auf diese Blattenebene ein, so wirkt sie auf 8 kreisförmig angeordnete frei fallende Testmassen wie oben gezeigt. Zuerst wird der Raum in einer Richtung gestaucht und in der senkrecht dazu stehenden gestreckt, dann erfolgt dasselbe mit vertauschten Richtungen. Die Metrik der Raumzeit 'wabbert' also ein bisschen. Das bewirkt, dass die Laufzeiten der aufgeteilten Hälften des Laserstrahls in den beiden Armen des Interferometers für eine kurze Zeit *bei feststehenden Spiegeln* schwanken. Daher sollten sich die beiden Teilstrahlen nach der Wiedervereinigung nicht mehr per Interferenz permanent auslöschen (so die Voreinstellung); sondern es sollte ein kurzzeitiges Aufflackern sichtbar werden.

Es ist durchaus möglich, dass morgen schon zum ersten Mal eine Gravitationswelle eindeutig und direkt nachgewiesen wird. Dazu gehört auch eine Portion Glück, Supernovaexplosionen ereignen sich nämlich auch in einer grösseren Galaxie wie der unsrigen nicht alle Tage. Die letzten beiden wurden von Tycho Brahe (1574) und Johannes Kepler (1604) entdeckt und haben der Idee der Unveränderlichkeit der Fixsternsphäre den Todesstoss versetzt.

Es gibt allerdings schon länger eine sehr präzise indirekte Bestätigung der Einstein'schen Gravitationswellen. Seit mehr als 30 Jahren wird das System B1913+16 von den Astronomen vermessen. Zwei Neutronensterne von etwa 1.5 Sonnenmassen und einem Durchmesser von 20 km (!) umkreisen einander wie auf dem Bild auf der gegenüberliegenden Seite. Ein Umlauf dauert dabei weniger als 8 Stunden. Da dieses System Energie in Form von Gravitationswellen abstrahlt, müssen sich die beiden Komponenten immer näher kommen. Die Umlaufzeit wird daher immer kürzer. Diese Umlaufzeit kann nun sehr genau gemessen werden, da einer der beiden ultrascharfe Radiopulse abstrahlt. Die Abnahme der Umlaufzeit von  $0.000'076'5$  Sekunden pro Jahr bestätigt die Prognose der ART mit einer Unsicherheit von 0.2%. 1993 haben R. Hulse und J. Taylor für die Entdeckung und die Analyse dieses (unechten) Doppelpulsars den Nobelpreis für Physik erhalten.



Ganz aktuelle Ergebnisse zu diesem Thema werden in [44] vorgestellt. Die Daten konnten dort anhand eines echten Doppelpulsars gewonnen werden, d.h. beide Komponenten des Doppelsystems strahlen als Pulsare Radioimpulse ab.

## 110 Aufgaben und Anregungen

1. Prüfen Sie die Zahlen in der letzten Spalte der Tabelle p.134, in dem Sie die entsprechenden Werte in Einsteins Formel (auf derselben Seite) einsetzen.
2. Prüfen Sie die numerischen Behauptungen in den letzten Textzeilen zum Satelliten Hipparcos auf p.139 !
3. In der Schwarzschild-Metrik ist der Durchmesser, multipliziert mit der Kreiszahl Pi, *grösser* als der entsprechende Kreisumfang. Daraus resultiert mit Epstein eine zusätzliche Perihelverschiebung in diejenige Richtung, in welcher der Planet umläuft (p.135). Wie könnte man mit Papier eine Geometrie realisieren, in welcher der Kreisumfang grösser wäre als der Durchmesser mal Pi ? Was hätte das für Auswirkungen auf die zusätzliche Periheldrehung ?
4. Zeigen Sie, dass der Wert von  $\alpha = G \cdot M / c^2$  für die Sonne in den Einheiten 'Lichtsekunden' etwa  $4.9261 \cdot 10^{-6}$  beträgt. Welchen Wert hat die Gravitationskonstante G in diesen Einheiten ?
5. Wir zeichnen den Querschnitt durch die aufgerollte Raumzeit wie im Abschnitt **H5** p.126 . Im Innern der Masse sollten wir einen Kugelausschnitt haben - und im Äusseren? Für schwache Felder dürfen wir in guter Näherung annehmen, dass dort  $y$  nach einer Funktion vom Typ  $y = a + b/x$  abnimmt. Bestimmen Sie diejenige Lösung  $f(x)$ , bei der der Wendepunkt in  $(3/4)$  liegt ! Was bedeutet die  $x$ -Koordinate 3 physikalisch, und wie gross ist dann  $R_S$  ? Handelt es sich wirklich noch um ein schwaches Feld ? Vergleichen Sie den Gang einer Uhr an der Oberfläche des Körpers mit demjenigen einer Uhr im Unendlichen !
6. Steigen Photonen in einem Gravitationsfeld auf, dann verlieren sie Energie. Werden sie dabei für einen Beobachter im OFF langsamer oder schneller ?
7. Wieviele zusätzliche Sekunden sind im OFF verstrichen, wenn in Amsterdam gerade ein Jahrhundert vergangen ist? Berücksichtigen Sie die ART (Gravitation der Sonne und der Erde) und die SRT (Bahngeschwindigkeit der Erde).
8. Bestimmen Sie aus dem mittleren Diagramm auf p.145 die Durchschnittsgeschwindigkeit des Flugzeuges während des 15-stündigen Fluges !
9. (zu **I4** p.143) Bestimmen Sie diejenige Relativgeschwindigkeit  $v$ , zu welcher eine Doppler-Frequenzverschiebung mit  $\Delta f / f$  von  $2.22 \cdot 10^{-15}$  gehört.
10. Die beinahe kreisförmigen Umlaufbahnen der NAVSTAR-GPS-Satelliten sind so gewählt, dass jeder Satellit während eines siderischen Tages die Erde genau zweimal umrundet.
  - a) In welcher Höhe über Meer kreisen diese Satelliten ?
  - b) Wieviele Nanosekunden gehen die Satellitenuhren pro Umlauf vor gegenüber einer Uhr auf Meereshöhe am Äquator, wenn die Bahn über die Pole führt ?
  - c) Wie b), aber für eine Bahn in der Äquatorebene mit gleichem Drehsinn wie die Erde ?
  - d) Wie c), aber für die entgegengesetzte Umlaufrichtung ?
11. Besuchen Sie die Seite <http://homepage.univie.ac.at/Franz.Embacher/Rel/> . Sie finden dort Lernprogramme zur SRT und zur ART. Arbeiten Sie einige davon durch - Sie sollten jetzt gut vorbereitet sein dafür!
12. Laden Sie das Skriptum von Peter Breitfeld mit dem Titel "Grundzüge der Relativitätstheorie" von **www.pBreitfeld.de** herunter. Vielleicht gefällt Ihnen die etwas formalere Darstellung des Gegenstandes.
13. Lesen Sie den Artikel [44] "Pulsare als kosmische Uhren" von M. Kramer in SuW 10/2006



Ein Einstein-Poster im Hintergrund wird durch eine der hochpräzisen Quarzkugeln, die im Experiment Gravity Probe B als Kreisel verwendet werden, ähnlich abgebildet wie von einer Sammellinse.

<http://www.gravityprobeb.com/gpbphotos.html> (8. Jan. 2007)



IR-View of "Pillars of Creation" at Centre of Eagle Nebula  
(VLT ANTU + ISAAC)

ESO PR Photo 37b/01 (20 December 2001)

© European Southern Observatory

## **K Vertiefungen und selbständige Arbeiten**

In diesem Kapitel werden kurze Hinweise auf ergänzende Themen und mögliche Vertiefungen gegeben. Die eigentliche Bearbeitung dieser Gebiete wird aber dem Leser überlassen. Dabei geht es um ganz verschiedene Themen wie historische Versuche zur Messung der Lichtgeschwindigkeit, Überlegungen zu natürlichen Maßeinheiten, Anwendungen der Theorie auf futuristische Reisen zu benachbarten Fixsternen, den Einsatz eines anderen mathematischen Formalismus für die SRT, der Darstellung der Zusammenhänge mit anderen Typen von Diagrammen oder dem Unterschied zwischen Messen und Sehen in der SRT. Eigentlich haben sich hier viele Dinge angesammelt, die ich gerne auch noch behandelt hätte, welche aber dem Buch einen abschreckenden Umfang verliehen hätten. Zudem sind Sie jetzt sehr gut vorbereitet darauf, diese Themen selbständig zu studieren!

## K1 Alte Experimente zur Messung der Lichtgeschwindigkeit

Die spekulativ-philosophische Phase der Diskussion um die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes dauerte bis 1676. Einzig Galilei versuchte schon kurz nach 1600 eine experimentelle Klärung dieser Streitfrage, hatte aber mit seinen Laternen und Gehilfen auf gegenüberliegenden Hügeln keine Chance, einen Messwert zu erhalten. Er interpretierte das auch korrekt dahingehend, dass die Lichtgeschwindigkeit eben *viel* grösser sei als die Schallgeschwindigkeit. René Descartes dagegen warf sein ganzes Prestige in die Waagschale als (schwaches) Argument für eine unendlich grosse Lichtgeschwindigkeit.

Präsentationen zum Thema 'Lichtgeschwindigkeit' könnten folgende Teilgebiete darstellen:

- Die spekulative Phase vor 1676: Empedokles, Aristoteles, Heron von Alexandria, die alten Inder, Avicenna und Alhazen, Kepler, Francis Bacon und Descartes
- Die Experimente von Galilei und seinen Schülern zur Messung der Lichtgeschwindigkeit
- Ole Rømer's Verständnis der jährlich-periodischen 'Verspätungen' und 'Verfrühungen' der Verfinsterung des Jupitermondes Io (1676). Seine Angabe zur Lichtgeschwindigkeit: 22 Minuten für einen Erdbahndurchmesser. Für letzteren gab es damals erst grobe Schätzwerte.
- James Bradley und die Aberration des Lichtes (1728). Seine Bestätigung des Wertes von Rømer aufgrund einer ganz anderen Messung verschaffte der Auffassung von der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit den Durchbruch. Bradleys Wert für  $c$  lag schon nahe beim heutigen.
- Armand H.L. Fizeau misst 1849 als erster die Laufzeit des Lichtes für eine Strecke von wenigen Kilometern (Zahnradmethode)
- Léon Foucault braucht 1850 mit seiner Drehspiegelmethode nur noch einen Laufweg von wenigen Metern und kann daher auch die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Medien messen
- Die Bedeutung des fast erblindeten Physikers François Arago als Ideenlieferant für Fizeau und Foucault
- S. Newcomb und A.A. Michelson verbessern Foucault's Methode und messen 1926 die Lichtgeschwindigkeit auf etwa 0.002% genau.
- Definition der Lichtgeschwindigkeit (und damit vor allem der Länge des Meters) 1983 durch die Mitglieder des Internationalen Büros für Mass und Gewicht (BIMP) zu  $299'797'458$  m/s
- Erwin Flachsel stellt in [42-129] eine Methode für jedermann vor: Man benötigt nur einen Telefonanschluss und eine Stoppuhr und ruft über einen geostationären Satelliten die Zeitansage in den USA an ... Ob das im Zeitalter der Digitaltechnik noch funktioniert?

Ebenfalls interessant ist das Experiment von Fizeau zur Lichtgeschwindigkeit in strömendem Wasser (1851). Er konnte seine Messresultate nicht verstehen, weil er von der klassischen Addition der Geschwindigkeiten ausging. Mit der Addition von Geschwindigkeiten gemäss SRT ergibt sich aber sein Resultat sofort.

Die *Definition* der Lichtgeschwindigkeit von 1983 öffnet den Weg, der im nächsten Abschnitt skizziert werden soll: Für  $c = 1$  (per definitionem) erhält man neue Einheitensysteme, welche die SRT in ihrem Kern schon berücksichtigen!

## K2 Natürliche Maßeinheiten in der SRT und ART

Denkt man konsequent in Raumzeit-Einheiten, so muss man der Lichtgeschwindigkeit den einheitenlosen Wert 1 zuschreiben: *Eine* Raumzeiteinheit pro Raumzeiteinheit. *Eine* Lichtsekunde pro Sekunde, wenn man das in Zeiteinheiten ausdrücken will. Dadurch erhalten Energie, Masse und Impuls automatisch dieselben Einheiten, aus  $E = m \cdot c^2$  wird beispielsweise einfach  $E = m$ . Dieser Ansatz soll allen folgenden Vorschlägen zugrunde liegen. Studieren Sie die Vereinfachungen, die sich daraus für die Beziehungen ergeben, die wir in E5 auf p.79 zusammengestellt haben!

Schon Carl Friederich Gauß hat vorgeschlagen, die elektromagnetischen Fundamentalkonstanten  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  zu eliminieren, indem man das Einheitensystem so wählt, dass sie den einheitenlosen Wert 1 erhalten. Das bringt für die Theorie des Elektromagnetismus viele Vereinfachungen. Wegen Maxwell's Gleichung  $c^2 = 1/(\epsilon_0 \cdot \mu_0)$  folgt daraus auch  $c = 1$ , was Gauß noch nicht wissen konnte. Nach diesem Vorschlag von Gauß werden das elektrische und das magnetische Feld zudem in denselben Einheiten gemessen. Und das passt: Gemäss SRT sind diese beiden Felder ja direkt ineinander transformierbar!

Man kann aber noch weiter gehen: Setzt man auch die Gravitationskonstante  $G$  auf den einheitenlosen Wert 1, so hat man damit das Kilogramm eliminiert und kann Massen ebenfalls in Zeit- oder Längeneinheiten messen. Besonders schön ist dabei die Verwendung von Längenmaßen, eine Masse ist dann gerade so schwer wie ihr Schwarzschildradius  $R_S$  !

Setzt man auch noch die Boltzmann-Konstante  $k$  auf den Wert 1, so wird dadurch eine neue Temperaturskala festgelegt und man kann dann **alle** physikalischen Größen beispielsweise in cm ausdrücken! Dieses *geometrisierte Einheitensystem* wird in [27] durchgehend verwendet.

Man muss ja nicht unbedingt so radikal vorgehen. In allen Fällen soll aber gelten  $\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$ . Studieren Sie für die folgenden Ansätze, wie sich die Einheiten von Zeit, Länge, Masse, Beschleunigung, Kraft, Impuls und Energie umrechnen in diejenigen unseres konventionellen mks-Systems. Bestimmen Sie jeweils auch die entsprechenden Werte einiger 'Naturkonstanten'. Sie erhalten dadurch ein ganz neues Gefühl für die Abhängigkeit dieser Werte voneinander!

1. Zeiten und Längen in Sekunden, Massen weiterhin in Kilogramm. Welchen Wert erhält insbesondere die Gravitationskonstante  $G$  ?
2. Zeiten und Längen in Nanosekunden, zusätzlich sei der Wert der Gravitationskonstante 1. Was entspricht jetzt der Masse von einem Kilogramm?
3. Zeiten und Längen in Zentimetern, zusätzlich sei der Wert der Gravitationskonstante 1. Was ist nun die Entsprechung zu einem Kilogramm? Wie schwer ist die Sonne?
4. Wie bei 3, zusätzlich habe auch die Boltzmann-Konstante den einheitenlosen Wert 1. Was ist die Entsprechung zu einem Grad Kelvin ?

Vielleicht nehmen Sie jeweils noch eine geeignete Definition der elektrischen Ladung hinzu, damit auch die elektrischen und magnetischen Größen angekoppelt sind!

“What makes Einstein's theory of relativity remarkable is its ability to unify various ideas in physics that had previously been treated independently. It unifies electricity with magnetism, materials [wohl besser: mass] with energy, gravity with acceleration and space with time.”

[47-25]

### **K3 Allgemeine Formeln für die Geschwindigkeitsaddition, den Dopplereffekt und die Aberration**

In den Abschnitten **D4** und **D6** haben wir uns überlegt, wie sich in der SRT Geschwindigkeiten in x-Richtung addieren und welches die korrekte Formel für den Dopplereffekt sei, wenn sich die Quelle in direkter Linie auf den Beobachter zu- oder von ihm wegbewegt. Im Abschnitt **D5** haben wir gesehen, wie sich 'Quergeschwindigkeiten' transformieren; und wir haben daraus auch abgeleitet, welchen Aberrationswinkel man in Rechnung stellen muss, wenn sich der Beobachter senkrecht zur Verbindungslinie Beobachter-Quelle bewegt.

Diese Resultate stellen eigentlich nur (wichtige) Spezialfälle von allgemeineren Ergebnissen dar. Diese könnten wir nach unseren Vorarbeiten problemlos herleiten. Wir verzichten aber darauf und geben nur an, wo man das nachlesen kann. Vielleicht wollen Sie selber eine Herleitung finden?

#### **Allgemeine Formeln für die Addition von Geschwindigkeiten:**

- bei Einstein selber: [12-158f]
- bei Horst Melcher: [26-37ff]
- bei Michael Fowler: [24-69f]
- bei Roman Sexl und Herbert Schmidt: [25-100ff]
- bei Jürgen Freund: [41-59ff]

#### **Allgemeine Formel für den Doppler-Effekt:**

- bei Einstein ohne Rechnung: [12-165ff]
- bei Horst Melcher: [26-72ff]
- bei Jürgen Freund: [41-89ff]
- bei Edwin Taylor und John Archibald Wheeler mit Vierervektoren: [11-263]

#### **Allgemeine Formel für die Aberration:**

- bei Einstein ohne Rechnung: [12-167]
- bei Horst Melcher: [26-74ff]
- bei Jürgen Freund: [41-65ff]

## K4 Kräfte und Beschleunigungen in der SRT

Gelegentlich muss man Beschleunigungen und Kräfte in andere Bezugssysteme umrechnen. So ist man zum Beispiel auch bei der Herleitung der Transformationen des elektrischen und magnetischen Feldes darauf angewiesen, dass man schon weiss, wie sich die Kräfte transformieren, soll doch die Beziehung  $\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  übergehen in  $\mathbf{F}' = q \cdot (\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}')$ .

Aus der Definition  $\mathbf{a} = d\mathbf{v} / dt$  und  $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}' / dt'$  und den Transformationen der Geschwindigkeit und der Zeit lässt sich herleiten, wie sich die Beschleunigungen in der SRT transformieren. Da die Beziehung  $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$  weiterhin gelten soll, und da wir schon wissen, wie sich Massen und Geschwindigkeiten transformieren, könnten wir auch herleiten, wie sich der Impuls transformiert. Bilden wir noch die Ableitungen nach der Zeit, so erhalten wir die Transformationsformeln für die Kräfte.

Eleganter wäre eine Behandlung mit *Vierervektoren* (siehe dazu auch [K9](#) p.165). Ein kleinerer algebraischer Aufwand wirft einen höheren Ertrag ab, wenn man dieses Werkzeug einsetzt! Allerdings muss man sich zuvor mit diesen Vierervektoren etwas anfreunden. Wir geben Hinweise für beide Pfade:

### Transformation von Kräften und Beschleunigungen ohne Vierervektoren:

- bei Horst Melcher: [26-45f]
- bei Jürgen Freund: [41-73ff]
- ??

### Transformation von Kräften und Beschleunigungen mit Vierervektoren:

- bei Roman Sexl und Herbert Schmidt: [25-115ff]
- bei Jürgen Freund: [41] Kapitel 28 bis 33
- ??

## K5 “Die Eroberung des Weltraums”

Es ist eine schöne Übung in Mathematik und Physik, eine humane Reise zu einem benachbarten Fixstern durchzurechnen. Human soll bedeuten, dass die Reisenden während der Beschleunigung und während des Abbremses vor der Umkehr eine konstante Beschleunigung vom Betrag der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche spüren sollen. Gibt man noch die angestrebte konstante Endgeschwindigkeit nach der Beschleunigungsphase und die Distanz zum Reiseziel vor, so sind alle benötigten Angaben gemacht.

Kranzer untersucht so in [17-205ff] eine Reise zum nächsten Fixstern  $\alpha$  Centauri (Distanz etwa 4.2 Lichtjahre) bei einer Geschwindigkeit von  $0.9 \cdot c$  nach der Beschleunigungsphase. Er verwendet dabei einige Formeln, ohne zu zeigen, wie diese hergeleitet werden können. Für einen interessierten Schüler ist das eine richtige Steilvorlage!

Die Mittelschulmathematik reicht bestens, um diesen Fall vollständig durchzurechnen. Ausgangspunkt ist dabei die Gleichung (siehe dazu auch p.74 unten !)

$$m_0 \cdot g = \text{konstant} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = m_0 \cdot \frac{d}{dv} \left( \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot \frac{dv}{dt} = m_0 \cdot \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dv}{dt}$$

Nach der Division durch  $m_0$  erhält man für die Geschwindigkeit des Raumfahrzeuges die folgende Differentialgleichung

$$g \cdot \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{dv}{dt}$$

Die Schüler können mindestens prüfen, dass die folgenden Funktionen für  $v(t)$  und  $x(t)$  dieser Differentialgleichung genügen:

$$v(t) = v_0 + \frac{g \cdot c \cdot t}{\sqrt{c^2 + g^2 \cdot t^2}} \quad ; \quad x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{c^2}{g} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{g^2 \cdot t^2}{c^2}} - 1 \right)$$

Die für die Raumreisenden verstrichene Eigenzeit während den Beschleunigungsphasen berechnet sich dann, indem man berücksichtigt, dass immer gilt

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot dt$$

Bildet man das Integral über die rechte Seite für die Dauer der Beschleunigungsphase in der Koordinatenzeit  $t$  eines Beobachters auf der Erde, so erhält man die unterdessen für einen Raumschiff-Insassen verstrichene Eigenzeit  $\Delta\tau$ . Das Ergebnis ist (für  $v_0 = 0$  und  $x_0 = 0$ )

$$\Delta\tau = \frac{c}{g} \cdot \left[ \ln \left( t + \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + t^2} \right) \right]_{t_0}^{t_1}$$

Die Reise hin und zurück dauert für die Erdenbürger etwa 12 Jahre, während auf den Borduhren immer noch mehr als dreiundeinhalb Jahre verstreichen. Es ist dabei völlig schleierhaft, mit welchen technischen Mitteln für gut drei Viertel der Startmasse (!) eine Endgeschwindigkeit von  $0.9 \cdot c$  erreicht werden könnte. Von einer bevorstehenden “Eroberung des Weltalls” zu sprechen ist tatsächlich reichlich übertrieben.

Für Leute, die gerne rechnen, enthält [26] viel anregendes Material auf den Seiten 164 bis 230 ! Auch [25-161ff] zeigt, was die SRT zu Reisen in unsere kosmische Nachbarschaft zu sagen hat.

## K6 Alternative Herleitungen von $E = m \cdot c^2$

Wir haben diese Formel in **E4** auf dem üblichen Weg über die kinetische Energie und die dafür investierte Beschleunigungsarbeit hergeleitet. Ähnlich wie beim Satz des Pythagoras gibt es aber auch zu dieser berühmten Gleichung viele Beweise oder Herleitungen. Auf die wohl schönste habe ich schon im letzten Abschnitt auf p.79 aufmerksam gemacht. Einstein verwendet dabei die Impulserhaltung und die Energieerhaltung sowie die Formeln für die Energie und den Impuls von Photonen. Sie ist dargestellt in [25-121ff] oder auch bei [26-57f].

Einige weitere schöne Beweise (siehe [26-55ff], [10-160ff]) benützen ebenfalls den Impuls von Lichtteilchen oder den Strahlungsdruck, den eine elektromagnetische Welle ausübt. Diese Grösse war um 1880 (also schon 'lange' vor der Quantentheorie) aus der Theorie von Maxwell bekannt.

Max Born hat in seiner seit 1920 immer wieder aufgelegten allgemein verständlichen Darstellung [43-240f] der Relativitätstheorien Einsteins einen anderen Zugang gewählt. Er leitet die Formel aus dem inelastischen Zusammenstoss zweier Klumpen bei nicht-relativistischen Geschwindigkeiten ab, also genau aus dem Vorgang, der in **E3** auf p.72 dargestellt ist. Diesen Weg beschreiten im Prinzip auch Sexl et al. in [8-24]: Die Formel für den Massenzuwachs nach einer Beschleunigung wird in eine Potenzreihe entwickelt, Glieder vierter und höherer Ordnung von  $v/c$  werden vernachlässigt und man erkennt, dass gilt  $E_{\text{kin}} = \Delta m \cdot c^2$ .

Dasselbe machte schon Einstein im September 1905. In seinem Aufsatz mit dem Titel "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?" leitet er die berühmte Gleichung aus seinen Transformationsformeln für die Strahlungsenergie her, die wir nicht besprochen haben. Der Aufsatz umfasst nur vier Seiten, er kann aber nicht unbedingt zur Lektüre empfohlen werden. Immerhin können wir die letzten Abschnitte verstehen, in denen Einstein zeigt, dass er sich der allgemeinen Folgen seiner Formel sehr bewusst ist. Ich habe im Zitat das Formelzeichen  $L$ , welches Einstein für die Energie damals noch benutzte, durch  $E$  ersetzt; und für die Lichtgeschwindigkeit habe ich  $c$  geschrieben statt  $V$ :

Gibt ein Körper die Energie  $E$  in Form von Strahlung ab, so verkleinert sich seine Masse um  $E/c^2$ . Hierbei ist offenbar unwesentlich, dass die dem Körper entzogene Energie gerade in Energie der Strahlung übergeht, so dass wir zu der allgemeineren Folgerung geführt werden:

Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieinhalt; ändert sich die Energie um  $E$ , so ändert sich die Masse in demselben Sinn um  $E / 9 \cdot 10^{20}$ , wenn die Energie in Erg und die Masse in Grammen gemessen wird.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass bei Körpern, deren Energieinhalt in hohem Maße veränderlich ist (z.B. bei den Radiumsalzen), eine Prüfung der Theorie gelingen wird.

Wenn die Theorie den Tatsachen entspricht, so überträgt die Strahlung Trägheit zwischen den emittierenden und absorbierenden Körpern.

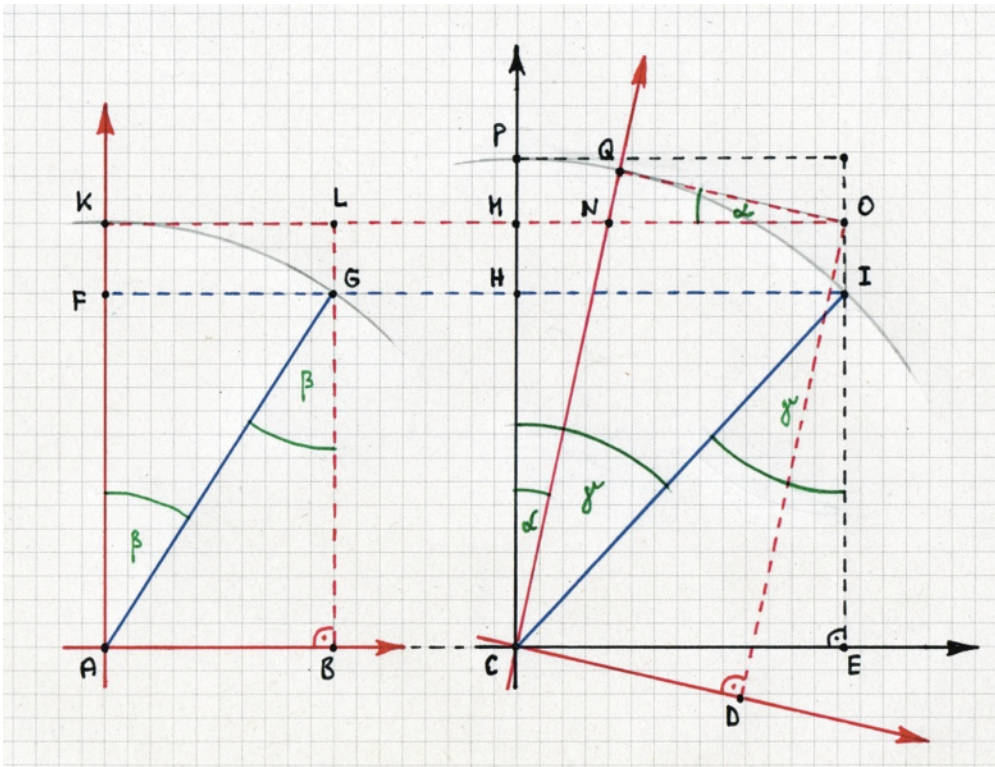
Bern, September 1905.

(Eingegangen 27. September 1905)

[12-183]

## K7 Herleitung der Formel für die Geschwindigkeitsaddition aus dem Epstein-Diagramm

Auf p.58 in **D3** haben wir einen Beweis der relativistischen Formel für die Addition von Geschwindigkeiten angekündigt, der auf die Lorentz-Transformationen verzichten kann und direkt auf das Epstein-Diagramm zu Raum und Zeit aufbaut. Grundlage dazu ist eine Zeichnung von Epstein selber im Anhang A der zweiten Auflage von [10]. Diese Figur wird hier so wiedergegeben, wie sie den Beweis am besten unterstützt:



Links in der Figur sieht man das Epstein-Diagramm zu folgendem Vorgang: Blau bewegt sich mit  $w'$  im Bezugssystem von Rot, es ist also  $\sin(\beta) = w'/c$ . Die Eigenlänge der zurückgelegten Strecke ist  $AB$ , für Blau dauert der Vorgang  $AF$ , während Rot dafür die Zeit  $AG = AK$  misst.

Rechts sieht man, dass sich Rot relativ zu Schwarz bewegt, es sei wie immer  $\sin(\alpha) = v/c$ . Für Schwarz bewegt sich Blau ebenfalls vom Anfang der Strecke  $CD$  bis zum Ende derselben (in  $I$  befindet sich Blau am Ort von  $O$ !). Die Zeitintervalle, die Rot und Blau für diesen Vorgang messen, sind unverändert ( $CM = AK$  respektive  $CH = AF$ ), und auch die Eigenlänge der von Blau aus der Sicht von Rot zurückgelegten Strecke ist unverändert ( $AB = CD = QO$ ).

Das Additionstheorem ist bewiesen, wenn wir zeigen können

$$\sin(\gamma) = \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}{1 + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}$$

Wir werden nicht alle der nachfolgend aufgeführten Strecken benötigen. Zudem ist natürlich deren physikalische Bedeutung für den Beweis irrelevant:

AK = AG = BL = CM = EO	Dauer des Vorgangs für Rot
AB = FG = KL = CD = QO	Eigenlänge der Laufstrecke für Rot
AF = BG = CH = EI	Dauer des Vorgangs für Blau
CE = HI = MO	Laufweg von Blau für Schwarz
CI = CQ = CP	Dauer des Vorgangs für Schwarz

Die Rechnung ist recht einfach:

$$\begin{aligned}
 \sin(\gamma) &= \frac{CE}{CI} = \frac{MO}{CQ} = \frac{MN+NO}{CN+NQ} = \frac{CM \cdot \tan(\alpha) + QO / \cos(\alpha)}{CM / \cos(\alpha) + QO \cdot \tan(\alpha)} = \\
 &= \frac{AG \cdot \tan(\alpha) + AB / \cos(\alpha)}{AG / \cos(\alpha) + AB \cdot \tan(\alpha)} = \frac{AG \cdot \tan(\alpha) + AG \cdot \sin(\beta) / \cos(\alpha)}{AG / \cos(\alpha) + AG \cdot \sin(\beta) \cdot \tan(\alpha)} = \\
 &= \frac{\tan(\alpha) + \sin(\beta) / \cos(\alpha)}{1 / \cos(\alpha) + \sin(\beta) \cdot \tan(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}{1 + \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}{1 + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}
 \end{aligned}$$

Die Interpretation dieser Rechnung ist nun dem Leser überlassen: Geht man davon aus, dass wir das Additionstheorem der Geschwindigkeiten ja bewiesen haben, dann prüft diese Rechnung die Korrektheit der nebenstehenden Konstruktion des Winkels  $\gamma$ . Sieht man aber die Korrektheit der Konstruktion physikalisch ein, so beweist obige Rechnung das Additionstheorem, ganz unabhängig von den Formeln für die Lorentz-Transformationen! Die Figur zeigt, wie man zu den Abkippwinkeln  $\alpha$  und  $\beta$  den passenden Winkel  $\gamma$  konstruiert, und wir haben jetzt gezeigt, dass die Formel unten auf p.162 die zur Konstruktion passende algebraische Berechnung angibt.

Es braucht schon einige Erfahrung im Umgang mit Epstein-Diagrammen, um die Korrektheit der Konstruktion zweifelsfrei zu erkennen. Es ist also kaum der Zugang, der sich didaktisch empfiehlt. Dennoch zeigt die Zeichnung von Epstein klar einige der wichtigsten Aspekte: Da die Eigenzeit des Vorgangs für Blau eine Invariante ist ( $AF = BG = CH = EI$ ), muss die Addition zweier Geschwindigkeiten, die kleiner sind als  $c$ , immer eine Geschwindigkeit ergeben, welche selber auch kleiner ist als  $c$ . Bewegt sich Blau horizontal für Rot (also wie Licht mit  $c$ ), dann wird sich Blau auch horizontal bewegen für Schwarz:  $v \oplus c = c$ .

Ich möchte an dieser Stelle nochmals Alfred Hepp danken, der mich überhaupt erst auf den Anhang A in der zweiten Auflage von [10] aufmerksam gemacht hat. Er hat mich auch hartnäckig dazu angehalten, die Konstruktion von Epstein zu einem Beweis des Additionstheorems allein auf der Grundlage der Epstein-Diagramme auszubauen. Unzufrieden mit meinem ersten Beweis hat er auch wesentlich dazu beigetragen, dass die hier vorliegende, viel einfachere Rechnung gefunden worden ist.

Noch eine Anregung: Die 'Hosenknopf-Addition'  $\oplus$  macht aus dem offenen Intervall  $]-1,1[$  eine kommutative Gruppe. Neutralelement ist die Null und das Inverse von  $v$  ist  $-v$ . Die Addition ist auch monoton in dem Sinne, dass aus  $a < b$  folgt  $a \oplus d < b \oplus d$ . Begründe die Assoziativität dieser Addition erstens physikalisch und zweitens algebraisch! Warum muss man die beiden Randpunkte 1 und -1 ausschliessen?

## K8 Die Transformation der elektrischen Größen

Es soll nochmals betont werden, dass die hier vorliegende Darstellung der SRT eine riesige Lücke aufweist: Es wird nicht davon gesprochen, was das jetzt alles für die Elektrizitätslehre und den Magnetismus bedeutet, obwohl ja der Anstoss zur Entwicklung der SRT aus dieser Ecke gekommen ist. Ich verweise daher nochmals (siehe auch p.95) auf die Darstellungen dieses Gegenstandes durch andere Autoren.

### **SRT und Elektromagnetismus in elementarer Darstellung**

- bei Michael Fowler [24-108ff]
- ??
- ??

### **SRT und Elektromagnetismus mit Vierervektoren**

- bei Roman Sexl und Herbert Schmidt [25-177ff]
- bei Jürgen Freund [41-218ff]
- ??

### **SRT und Elektromagnetismus mit Vektor-Analyse**

- bei Albert Einstein [12-160ff]
- ??
- in irgend einem Lehrbuch

## K9 SRT mit Vierervektoren

Raumgeometrische Probleme können mit ganz verschiedenen mathematischen Techniken behandelt werden. So kann man beispielsweise das Volumen eines Tetraeders elementargeometrisch berechnen, man kann die Vektorgeometrie dazu einsetzen oder auch die Integralrechnung. Gewisse Fragen lassen sich oft mit dem geeigneten Ansatz sehr elegant beantworten, während eine andere Behandlung aufwendig ist oder sogar nur näherungsweise gelingt.

Der beste algebraische Apparat für Berechnungen in der SRT ist derjenige mit Vierervektoren! Nicht nur Ort und Zeit eines Ereignisses, sondern auch alle anderen physikalischen Grössen werden konsequent durch Vektoren mit 4 Komponenten beschrieben: Es gibt die Vierergeschwindigkeit, die Viererbeschleunigung, die Viererkraft, den Viererimpuls und den Viererstrom. Alle diese Vierervektoren transformieren sich beim Übergang zu einem anderen Koordinatensystem genauso, wie wir es von den Orts- und Zeitkoordinaten kennen, also gemäss den Lorentz-Transformationen. Und für beliebige Vierervektoren **A** und **B** existiert ein einfaches Skalarprodukt, sodass **A·B** immer einen konstanten, vom Bezugssystem unabhängigen Wert annimmt!

Als Beispiele seien der Viererimpuls **P** und die Vierergeschwindigkeit **V** erwähnt:

$$\mathbf{P} = (E_{\text{tot}}/c, p_x, p_y, p_z) = m_0 \gamma \cdot (c, v_x, v_y, v_z) = m_0 \mathbf{V} \quad \text{oder kürzer geschrieben}$$

$$\mathbf{P} = (E_{\text{tot}}/c, \mathbf{p}) = m_0 \gamma \cdot (c, \mathbf{v}) = m_0 \mathbf{V}$$

Dabei ist **p** der 3d-Impulsvektor, **v** die 3d-Raumgeschwindigkeit. Das Skalarprodukt zweier Vierervektoren  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  und  $(y_0, y_1, y_2, y_3)$  wird definiert durch  $x_0 \cdot y_0 - x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3$ . Berechnen wir schnell, was **P**<sup>2</sup> und **V**<sup>2</sup> bedeuten:

$$\mathbf{P}^2 = (E_{\text{tot}}/c)^2 - \mathbf{p}^2 = (E_{\text{tot}}^2 - \mathbf{p}^2 \cdot c^2)/c^2 = E_0^2 / c^2 = m_0^2 \quad \text{nach unseren Gleichungen in E5 p.79}$$

Dies ist offensichtlich eine invariante Grösse! Wenn Sie beim Epstein-Diagramm auf p.78 alle Seiten des rechtwinkligen Dreiecks durch *c* dividieren, stellt diese Rechnung nur eine Variante des Satzes von Pythagoras dar! Ich möchte behaupten, dass die Epstein-Diagramme dem Rechnen mit Vierervektoren besonders nahe stehen.

**V**<sup>2</sup> bestimmen wir für den Fall, wo **v** = *v<sub>x</sub>* gilt, also für *v<sub>y</sub>* = 0 = *v<sub>z</sub>* :

$$\mathbf{V}^2 = (1/\gamma)^2 \cdot (c^2 - v_x^2 - 0 - 0) = (c^2 - v^2)/(1 - v^2/c^2) = c^2 \cdot (1 - v^2/c^2)/(1 - v^2/c^2) = c^2$$

Auch dies ist offensichtlich eine invariante, das heisst vom Bezugssystem unabhängige Grösse. Und das Ergebnis passt doch wunderbar zu Epsteins 'Mythos'! Als kleine Übung könnten Sie sich überlegen, was denn **P·V** bedeutet.

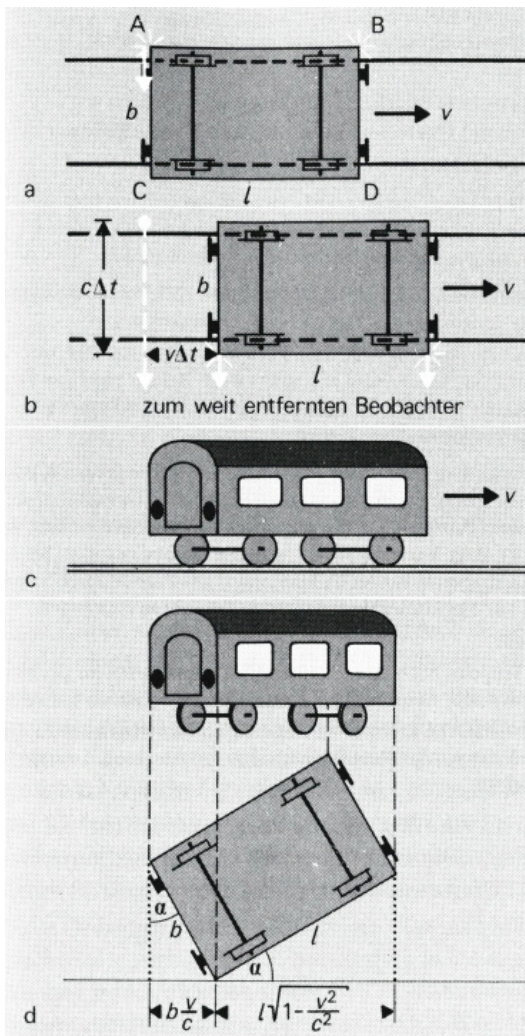
Ziel dieses Buches war ja nicht die algebraische Behandlung von anspruchsvollen und wichtigen Beispielen wie etwa der Compton-Streuung. Es geht primär darum, eine sehr gute *Anschauung* von den Aussagen der SRT und ART zu vermitteln. Oder, wie Epstein in [10-100] schreibt: "Um die spezielle Relativitätstheorie auch im Bauch zu verstehen, brauchen wir einen guten, neuen Mythos." Die Vermittlung des Epstein'schen Mythos war mein Hauptanliegen. Hat man sich diese Basis einmal verschafft, so fällt es leicht, sich in einem zweiten Durchgang auch noch gewisse technische Tools anzueignen. Mit diesen Tools können dann beliebig verzwickte Probleme angepackt werden. Und **das** Tool für speziell-relativistische Rechnungen sind die Vierervektoren.

Für ein erstes Studium dieser Vierervektoren sei [25] empfohlen. Arbeitet man dort die Kapitel 12 und 13 durch, so ist man schon tief in diese Welt eingedrungen. Auch die Darstellung in [41] ist für einen Maturanden oder eine Abiturientin durchaus zugänglich, der Titel "Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger - ein Lehrbuch" beschreibt das Anspruchsniveau ganz korrekt. Empfohlen sei auch ein Besuch auf [www.relativity.li/maxwell/maxwell-gleichungen.html](http://www.relativity.li/maxwell/maxwell-gleichungen.html)

## K10 Messen und Sehen in der SRT

Messen und Sehen bedeutet nicht dasselbe. Eine Messung vornehmen bedeutet typischerweise, mit einer Uhr *am Orte des Geschehens* die Zeit zu 'stoppen', das heisst, an einem bestimmten Ort einen Zeitpunkt zu erfassen. Mit Sehen bezeichnen wir den Vorgang, bei dem wir an einem bestimmten Ort und zu einem bestimmten Zeitpunkt die optischen Signale registrieren, die von allen möglichen Orten her zu jenem Zeitpunkt gerade eintreffen. Sehen ist also vergleichbar mit dem Fotografieren. Auf einer Astrofotografie mit einer Belichtungszeit von 0.1 Sekunden können wir gleichzeitig den Neumond sehen, wie er vor einer guten Sekunde ausgesehen hat, den Planeten Mars, wie er vor einer Viertelstunde ausgesehen hat, und noch den Saturn dank dem Licht, das er vor mehr als einer Stunde reflektiert hat! Würden wir die Aufnahme länger belichten (einige Minuten reichen schon dafür), so könnten wir vielleicht noch schwach eine Galaxie erkennen, abgebildet durch Photonen, welche schon vor Millionen von Jahren auf den Weg geschickt worden sind!

Es ist also möglich, Dinge zu sehen, die längst nicht mehr existieren. Der Ausbruch einer Supernova in der Grossen Magellanschen Wolke, einer kleinen Begleitgalaxie unserer Milchstrasse, hat sich vor etwa 163'000 Jahren abgespielt, wenn wir ihn heute beobachten. Die Laufzeit des Lichtes muss man aber auch berücksichtigen, wenn man sich überlegt, wie man ein Objekt sehen würde, welches sich sehr schnell bewegt. Betrachten wir die folgende Zeichnung aus [25-85]:



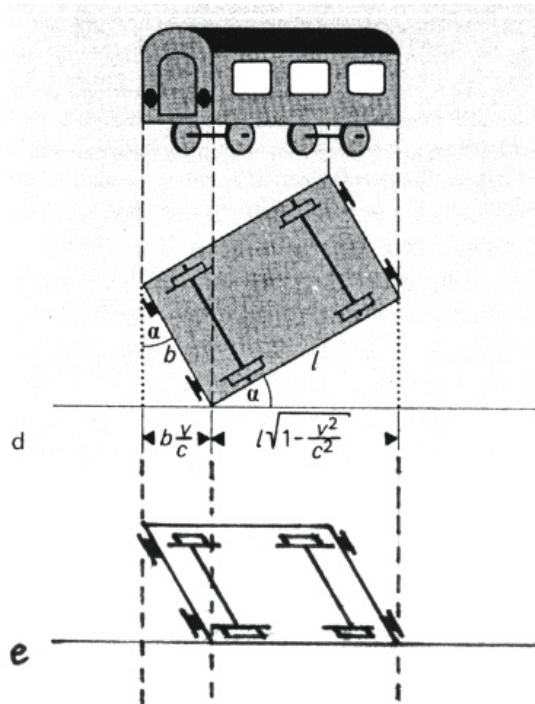
Photonen verlassen die Ecken A und B des Bahnwagens. Die Photonen von B können aber nicht zu uns gelangen.

Erst jetzt (nach der Zeit  $\Delta t$ ) werden die Photonen von den vorderen Ecken C und D ausgesandt, welche gleichzeitig mit denen von der Ecke A unser Auge erreichen werden.

So würde sich der Wagen präsentieren, wenn es die Lorentz-Kontraktion nicht gäbe!

So sehen wir den Wagen tatsächlich, da ja der Abstand der Ecken C und D infolge der hohen Geschwindigkeit  $v$  geschrumpft ist.

Das ist exakt die Ansicht, welche wir auch vom Wagen hätten, wenn er um den Winkel  $\alpha$  mit  $\sin(\alpha) = v/c$  von der Blickrichtung weggedreht wäre!



Dass der Wagen sich abgedreht präsentiert ist aber nur unsere 3d-Interpretation des 2d-Bildes, welches wir von der Situation haben!

Mindestens so richtig wäre die Interpretation, dass der Wagen lorentz-gestaucht und auch noch schiefgedrückt worden ist. Allerdings würde einem diese Deutung rein optisch etwas schwerer fallen. Sie passt aber schon besser auf die Transformation der *Dichte* ! Diese Hinzufügung stammt natürlich nicht vom Autor von [25].

Unterdessen gibt es eine ganze Fraktion innerhalb der Relativitätsgemeinde, welche die heute verfügbare Rechenleistung ausnutzt um zu zeigen, wie zum Beispiel ein Flug durch das Brandenburger Tor mit  $0.95 \cdot c$  visuell erlebt würde. Manchmal werden dabei sogar die Farbveränderungen durch den optischen Doppler-Effekt berücksichtigt. Natürlich muss man dann das Ganze wieder in Zeitlupe abspielen, damit es für einen menschlichen Betrachter nicht zu schnell abläuft. Eine erste Adresse für solche Visualisierungen ist

[www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de](http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de)

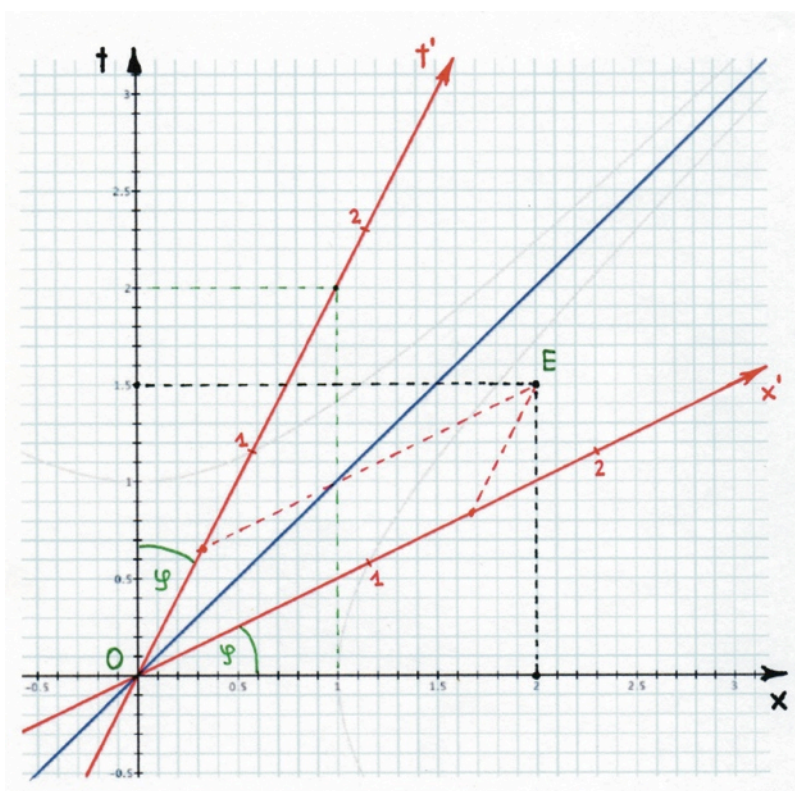
Hinter dieser Adresse steht in erster Linie Ute Kraus von der Universität Tübingen. Ihre Gruppe hat für das Einstein-Jubiläum 2005 auch relativistische Fahrrad-Touren durch die Altstadt von Tübingen respektive Bern realisiert. In den Ausstellungen in Ulm und in Bern konnte sich der Besucher auf ein (festmontiertes) Fahrrad schwingen und lospedalen. Seine Fahrgeschwindigkeit wurde dann von einem Rechner für die auftretenden Effekte von 30 km/h auf 300'000 km/s gestreckt. Damit man aber in den engen Gassen doch noch die Kurve kriegte (und überhaupt noch etwas sehen konnte!), zogen die Häuser mit der ungestreckten Geschwindigkeit am Radelnden vorbei.

Wenn Sie an solchen Visualisierungen Freude haben, sollten Sie unbedingt einen Besuch auf der oben empfohlenen Internetseite machen. Sie finden dort auch Literaturhinweise und anderes weiterführende Material rund um die Relativitätstheorien von Albert Einstein.

## K11 SRT mit Minkowski-Diagrammen

In keiner der mir bekannten Einführungen in die SRT werden Epstein-Diagramme verwendet - ausgenommen natürlich in der Originaldarstellung [10] von Epstein selber. In allen anderen Büchern werden Minkowski-Diagramme eingesetzt, wenn eine Situation für zwei relativ zueinander bewegte Bezugssysteme graphisch dargestellt werden soll. Diese Minkowski-Diagramme haben selbstverständlich auch gewisse Vorteile, dennoch halte ich die Epstein-Diagramme geeigneter für eine erste und auch eine zweite Annäherung an die SRT. Ganz unverzichtbar sind unsere Epstein-Diagramme, wenn man sich auch anschaulich-'gefühlsmässig' mit der ART befassen will. Deshalb ist ja auch dieses Buch geschrieben worden.

Ich werde hier nur die markanten Unterschiede zwischen den Minkowski-Diagrammen und den Epstein-Diagrammen hervorheben und im übrigen auf einige der zahlreichen Lehrbücher verweisen, welche eine Einführung in den Umgang mit Minkowski-Diagrammen enthalten.

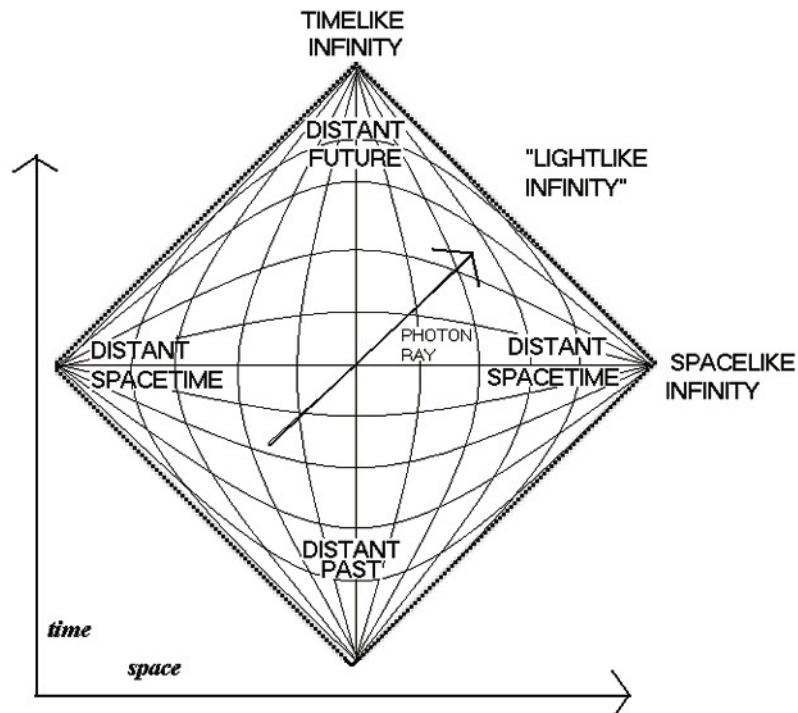


Rot bewegt sich hier für Schwarz mit  $v = 0.5 \cdot c$  entlang der Schwarzen x-Achse. Im Minkowski-Diagramm gilt allgemein  $\tan(\varphi) = v/c$ , während wir im Epstein-Diagramm  $\sin(\varphi) = v/c$  haben. Das Ereignis E findet für Schwarz am Ort 2 zum Zeitpunkt 1.5 statt. Rot ordnet E ungefähr die Koordinaten  $x' \approx 1.45$  und  $t' \approx 0.58$  zu (die gestrichelten roten Linien sind parallel zu den roten Koordinatenachsen). Die Einheitsstrecken liegen auf den hellgrau dargestellten Eichhyperbeln  $y^2 = 1 + x^2$  respektive  $x^2 = 1 + y^2$ . Lichtteilchen bewegen sich in jedem Bezugssystem senkrecht oder parallel zu der blauen Winkelhalbierenden. Im Epstein-Diagramm bewegen sich Lichtteilchen in jedem Bezugssystem senkrecht zu seiner (Eigen-)Zeitachse.

Fast alle Einführungen in die SRT, die sich nicht auf eine qualitative Beschreibung der Phänomene beschränken, präsentieren auch die Minkowski-Diagramme. In unserer Liste beispielsweise finden sich entsprechende Darstellungen in [11], [25], [41] und [45], wobei ich die letzten beiden besonders empfehlen würde. Ganz neu und superschön: [48] !

## K12 SRT mit Penrose-Diagrammen

Es gibt aber noch weitere Möglichkeiten, relativistische Zusammenhänge graphisch darzustellen. Die beiden britischen Mathematiker B. Carter und R. Penrose haben eine Abbildung präsentiert, welche die unendlich ausgedehnte Minkowski-Ebene so auf ein Quadrat abbildet, dass Lichtstrahlen weiterhin Geraden sind, die parallel zu einer der beiden Winkelhalbierenden verlaufen. Linien von konstanter Zeit oder konstantem Ort werden dabei zu Hyperbeln. In der Bildmitte sieht man unverzerrt das lokale Geschehen, während entfernte Ereignisse sehr zusammengedrängt werden.



Diese Abbildung stammt aus der freien Enzyklopädie Wikipedia. Auf der bereits erwähnten Internetseite von Franz Embacher

<http://homepage.univie.ac.at/Franz.Embacher/Rel/>

findet man auch ein Java-Applet, welches einem erlaubt, mit dieser Koordinatentransformation zu spielen. Spielt man ernsthaft und löst auch die gestellten Aufgaben, so hat man schon ein gutes Gefühl dafür, was diese Abbildung leistet.

Als Funktion, die streng monoton steigend ist, in der Nähe des Nullpunktes nichts ändert (also  $f(x) \approx x$ ), und die für  $x \rightarrow \infty$  einen endlichen Grenzwert hat, wird der ArcusTangens verwendet. Die Spitzen des obigen Quadrates liegen also  $\pm \pi/2$  vom Nullpunkt entfernt. Die Abbildung von der Minkowski-Ebene in die Penrose-Welt ist durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$x' + t' = \text{ArcTan}(x + t) \quad \text{und} \quad x' - t' = \text{ArcTan}(x - t)$$

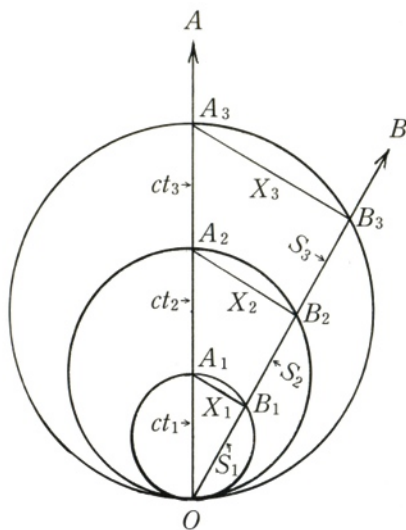
Addition respektive Subtraktion dieser Gleichungen liefert sofort die Transformationsgleichungen für  $x'$  respektive  $t'$  alleine. Es ist leicht zu zeigen, dass vom Nullpunkt ausgehende Lichtstrahlen auch im Penrose-Diagramm solche winkelhalbierenden Geraden sind. Zeigen Sie, dass alle Lichtsignale auf Parallelen zu diesen Geraden laufen!

Finden Sie selber eine Abbildung, die Ähnliches leistet! Ist der ArcusTangens wirklich besser als Ihr Vorschlag?

## K13 SRT mit Asano-Diagrammen

Erst nach der 'Fertigstellung' dieses Buches habe ich im Keller der Zentralbibliothek Zürich ein kleines Büchlein [47] entdeckt, in welchem die beiden Brüder Seiichi und Shiro Asano ihre "Space-Time Circular Diagrams" vorstellen. Die erste japanische Ausgabe erschien 1983, also zeitgleich mit der Originalausgabe [14] von Epstein! Die Brüder Asano liessen sich 1922 als kleine Jungen vom Rummel um Einsteins Besuch in Japan beeindruckt. Sie machten dann aber Karriere als Elektroingenieur respektive Mediziner. Nach ihrer Pensionierung beschlossen sie, sich selber und auch anderen die SRT anschaulich zu erschliessen.

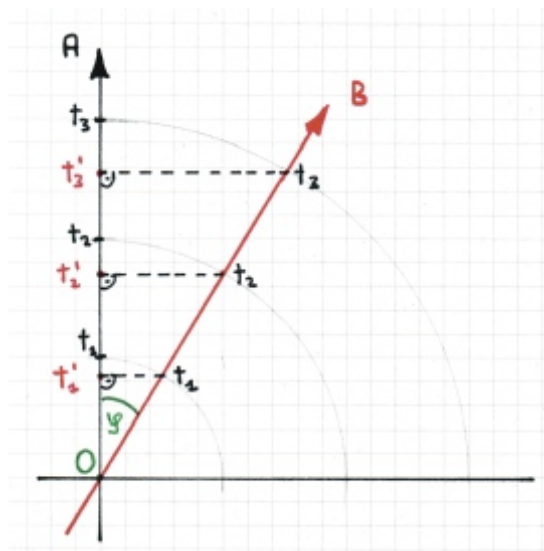
Wie Epstein gehen sie von Minkowskis Gleichung  $\Delta\tau^2 = c \cdot \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$  aus, unterdrücken die y- und z-Komponente und stellen die verbleibende Beziehung  $\Delta\tau^2 = c \cdot \Delta t^2 - \Delta x^2$  so um, dass sie als Kreisgleichung interpretiert werden kann:  $c \cdot \Delta t^2 = \Delta\tau^2 + \Delta x^2$ . Auch bei den Brüdern Asano ist die Gerade, auf der sich B mit konstanter Geschwindigkeit v durch die Raumzeit bewegt, von der Zeitachse eines ruhenden Beobachters A um einen Winkel  $\varphi$  abgekippt, für den  $\sin(\varphi) = v/c$  gilt. Sie betrachten rechtwinklige Dreiecke, die kongruent sind zu denjenigen in den entsprechenden Epstein-Diagrammen [47-49]:



A und B sind sich in O begegnet und haben dabei beide ihre Uhren auf null gestellt. Der Sinus des Winkels AOB ist  $v/c$ , bei  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$  haben wir nach dem Satz des Thales rechte Winkel.

Wenn für A die Zeit  $t_3$  verstrichen ist, welche der Strecke  $OA_3$  entspricht, dann ist für B erst die Zeit verstrichen, welche der Strecke  $OB_3$  entspricht. Zum Zeitpunkt  $t_3$  hat B die Distanz  $X_3 = A_3B_3$  von A.

Die entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke im Epstein-Diagramm erhalten wir, wenn wir diejenigen im Asano-Diagramm an der Winkelhalbierenden des Winkels AOB spiegeln:







The Starburst Galaxy NGC 908  
(FORS/VLT)

ESO Press Photo 27a/06 (26 July 2006)

© ESO

## L Literaturangaben

Hier finden Sie die bibliographischen Angaben zu den in eckigen Klammern erwähnten Werken. Die erste Liste ist nach der Reihenfolge des Auftretens im Text geordnet, im zweiten Abschnitt sind dieselben Titel alphabetisch nach dem erstgenannten Autor aufgeführt.

Eine hoffentlich überflüssige Gebrauchsanweisung: Die Angabe [10-158ff] verweist natürlich auf die Seiten 158 und einige der folgenden im Buch [10].

## L1 Literaturverzeichnis in der Reihenfolge des Auftretens

- [1] Newton, Isaac: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica  
Erste Auflage London 1687
- [2] Newton, Isaac: Die mathematischen Prinzipien der Physik  
in der Übersetzung von Volkmar Schüller, de Gruyter Verlag, Berlin 1999
- [3] Galilei, Galileo: Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo  
Batista Landini, Florenz 1632
- [4] Galilei, Galileo: Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme  
in der Übersetzung von Emil Strauss, Teubner Verlag, Leipzig 1891
- [5] Kepler, Johannes: Astronomia Nova  
Druck bei Vögtlin, Heidelberg 1609
- [6] Kepler, Johannes: Neue Astronomie  
in der Übersetzung von Max Caspar, Oldenbourg Verlag, München 1929/1990
- [7] Pais, Abraham: Raffiniert ist der Herrgott ...  
aus dem Amerikanischen übersetzt von R. Sexl, H. Kühnelt und E. Streeruwitz  
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg • Berlin 2000
- [8] Sexl, Roman ; Raab, Ivo und Streeruwitz, Ernst: Materie in Raum und Zeit  
Eine Einführung in die Physik Bd. 3  
Sauerländer Verlag, Aarau • Frankfurt • Salzburg 1996<sup>3</sup>
- [9] Kopernikus, Nikolaus: Das neue Weltbild  
lateinisch/deutsche Ausgabe mit der Übersetzung von Hans Günter Zekl  
Felix Meiner Verlag, Hamburg 1990
- [10] Epstein, Lewis Carroll: Relativitätstheorie anschaulich dargestellt  
aus dem Englischen übersetzt von Udo Rennert  
Birkhäuser Verlag, Basel • Boston • Stuttgart 1985
- [11] Taylor, Edwin F. und Wheeler, John Archibald: Spacetime Physics  
W.H. Freeman and Company, New York 1991<sup>2</sup>
- [12] Stachel, John (Hrg.): Einsteins Annus mirabilis  
aus dem Amerikanischen übersetzt von Anita Ehlers  
Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg 2001
- [13] Höfling, Oskar: Physik Band II Teil 3  
Ferd. Dümmler Verlag, Bonn 1979<sup>12</sup>
- [14] Epstein, Lewis Carroll: Relativity visualized  
Insight Press, San Francisco 1983
- [15] Wheeler, John Archibald: Gravitation und Raumzeit  
aus dem Amerikanischen übersetzt von Claus Kiefer  
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg • Berlin • New York 1992

- [16] Boysen, Gerd et al.: Physik Oberstufe Band 2 Grundkurs  
Cornelsen Verlag, Berlin 1998
- [17] Kranzer, Walter: So interessant ist Physik  
Aulis Verlag Deubner & Co. , Köln 1990<sup>2</sup>
- [18] Einstein, Albert: Zur Elektrodynamik bewegter Körper  
Annalen der Physik Bd.17, 1905, p.891-921
- [19] Einstein, Albert: Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?  
Annalen der Physik Bd.18, 1905, p.639-641
- [20] Einstein, Albert: Aus meinen späten Jahren  
Ullstein Verlag, Frankfurt • Berlin 1993<sup>4</sup>
- [21] Einstein, Albert: Mein Weltbild  
herausgegeben von Carl Seelig  
Ullstein Taschenbuchverlag, München 2001<sup>27</sup>
- [22] Einstein, Albert: Einstein sagt - Zitate, Einfälle, Gedanken  
herausgegeben von Alice Calaprice, die deutsche Ausgabe betreute Anita Ehlers  
Piper Verlag GmbH, München 1997
- [23] Volkmer, Martin: Basiswissen Kernenergie  
Herausgeber: Informationskreis KernEnergie, Berlin 2005<sup>2</sup>
- [24] Fowler, Michael: Die spezielle Relativitätstheorie  
aus dem Amerikanischen übersetzt von Christoph Scholz  
<http://galileo.phys.virginia.edu/classes/252/einstein-deutsch.pdf>
- [25] Sexl, Roman und Schmidt, Herbert Kurt: Raum Zeit Relativität  
Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden 1991<sup>3</sup>
- [26] Melcher, Horst: Relativitätstheorie in elementarer Darstellung  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1970<sup>2</sup>
- [27] Misner, Charles W. ; Thorne, Kip S. und Wheeler, John Archibald: Gravitation  
W. H. Freeman and Company, New York 1973
- [28] Genz, Henning: Die Entdeckung des Nichts  
Carl Hanser Verlag, München • Wien 1994
- [29] Einstein, Albert: Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie  
Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden 1992<sup>23</sup>
- [30] Hermann, Armin: Einstein - der Weltweise und sein Jahrhundert  
R. Piper GmbH & Co. KG, München 1994
- [31] Bürke, Thomas: Albert Einstein  
Deutscher Taschenbuch Verlag, München 2005<sup>2</sup>
- [32] Rosenkranz, Ze'ev: Albert Einstein - privat und ganz persönlich  
Historisches Museum Bern / Verlag Neue Zürcher Zeitung / Albert Einstein Archiv  
Bern/Zürich/Jerusalem 2004 ISBN 3-03823-101-0

- [33] Thorne, Kip S.: Gekrümmter Raum und verbogene Zeit  
aus dem Amerikanischen übersetzt von Doris Gerstner und Shaukat Kahn  
Droemersch Verlagsgesellschaft Th. Knauer Nachf., München 1994
- [34] Fritzsche, Harald: Eine Formel verändert die Welt  
Piper Verlag GmbH, München 2005<sup>9</sup> (1990<sup>1</sup>)
- [35] Fritzsche, Harald: Die verbogene Raumzeit  
Piper Verlag GmbH, München 1996
- [36] Guthmann, Andreas: Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung  
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg • Berlin 2000<sup>2</sup>
- [37] Pais, Abraham: Ich vertraue auf Intuition - der andere Albert Einstein  
aus dem Amerikanischen übersetzt von Heiner Must  
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg • Berlin • Oxford 1995
- [38] Sexl, Roman und Sexl, Hannelore: Weisse Zwerge - Schwarze Löcher  
Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden 1979<sup>2</sup>
- [39] Alley, Carroll O.: Relativity and Clocks  
33rd Annual Symposium on Frequency Control, 1979 p.4-39
- [40] Ciufolini, Ignazio und Pavlis, E. C.:  
A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense-Thirring effect  
Nature, Vol. 431, 21 October 2004, p.958-960
- [41] Freund, Jürgen: Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger - ein Lehrbuch  
vdf Hochschulverlag AG, ETH Zürich, 2005<sup>2</sup>
- [42] Flachsel, Erwein: Hundertfünfzig Physik-Rätsel  
Ernst Klett Verlag GmbH u. Co. KG, Stuttgart 1985
- [43] Born, Max: Die Relativitätstheorie Einsteins  
Springer-Verlag, Berlin • Heidelberg • New York usw. 1969<sup>5</sup> (1920<sup>1</sup>)
- [44] Kramer, Michael: Pulsare als kosmische Uhren  
Sterne und Weltraum (Zeitschrift) Ausgabe 10 / 2006 p.30-37
- [45] Salim, Wolfgang: Gleichzeitigkeit Schwarze Löcher Gekrümmte Raumzeit  
Aulis Verlag Deubner, Köln 2002
- [46] Matter, Mani: Us emene lääre Gygechaschte  
Benziger Verlag, Zürich • Köln 1982<sup>19</sup> (1972<sup>1</sup>)
- [47] Asano, Seiichi und Asano, Shiro: A Novel Concept for Understanding the Special Theory  
of Relativity - The Space-Time Circular Diagram Method  
Gakujutsu Tosho Ltd. , Tokyo 1994 (Japanische Erstauflage 1983)
- [48] Bais, Sander: Very Special Relativity  
Harvard University Press, Cambridge MA • London 2007

Die Leistungen von **Johannes Kepler** für die Entwicklung der modernen Astronomie und Physik können nicht genug betont werden. Dem Trägheitsprinzip war er so nahe wie Galilei, von den Kräften, die zwischen den Himmelskörpern wirken müssen, hatte er klare Vorstellungen, und in der Kinematik war er Galilei weit überlegen. Auch seine Bemerkungen zu Ebbe und Flut sind weitaus vernünftiger als diejenigen von Galilei. Kepler und Galilei haben korrespondiert. Während Kepler mit hoher Achtung von Galileis Forschungsergebnissen gesprochen hat, hat Galilei Keplers Werk kaum zur Kenntnis genommen und ihm auch nie eines seiner Fernrohre zukommen lassen. Kepler hat ihn ausdrücklich darum gebeten, um die wunderbaren Entdeckungen, die Galilei damit gemacht hat, mit eigenen Augen erleben zu können. Auch in der Optik war Kepler übrigens Galilei theoretisch weit voraus, sein Büchlein "Dioptrik" ist als Theorie der Strahlenoptik heute noch brauchbar.

Einstein schreibt zum Verhältnis von Galilei zu Kepler:

Das - leider - ist Eitelkeit! Man findet sie bei so vielen Wissenschaftlern. Wissen Sie, der Gedanke, dass Galilei das Werk Keplers nicht anerkannt hat, hat mir immer weh getan.

[22-89]

Mit dem folgenden Ausschnitt aus der Einleitung in die "astronomia nova" von Kepler möchte ich einen Eindruck von seinem physikalischen Denken vermitteln:

Die wahre Lehre über die Schwere stützt sich nun auf folgende Axiome:

Jede körperliche Substanz ist, insofern sie körperlich ist, von Natur aus dazu geneigt, an jedem Ort zu ruhen, an dem sie sich allein findet, ausserhalb des Kraftbereichs eines verwandten Körpers.

Die Schwere besteht in dem gegenseitigen körperlichen Bestreben zwischen verwandten Körpern nach Vereinigung oder Verbindung (von dieser Ordnung ist auch die magnetische Kraft), so dass die Erde vielmehr den Stein anzieht, als dass der Stein nach der Erde strebt.

...

Wäre die Erde nicht rund, so würde das Schwere nicht überall geradlinig auf den Mittelpunkt der Erde zu, sondern von verschiedenen Seiten aus nach verschiedenen Punkten hingetrieben.

Wenn man zwei Steine an einen beliebigen Ort der Welt versetzen würde, nahe beieinander ausserhalb des Kraftbereichs eines dritten verwandten Körpers, dann würden sich jene Steine ähnlich wie zwei magnetische Körper an einem zwischenliegenden Ort vereinigen, wobei sich der eine dem anderen um eine Strecke nähert, die der Masse des anderen proportional ist.

...

Der Bereich der Anziehungskraft des Mondes erstreckt sich bis zur Erde und lockt das Wasser in die heisse Zone, um dort mit ihm zusammenzutreffen, wo er gerade in den Zenith gelangt, und zwar unmerklich in eng eingeschlossenen Meeren und merklich dort, wo die Meeresstrecken sehr breit sind und die Gewässer einen weiten Spielraum zum Hin- und Herfluten besitzen.

...

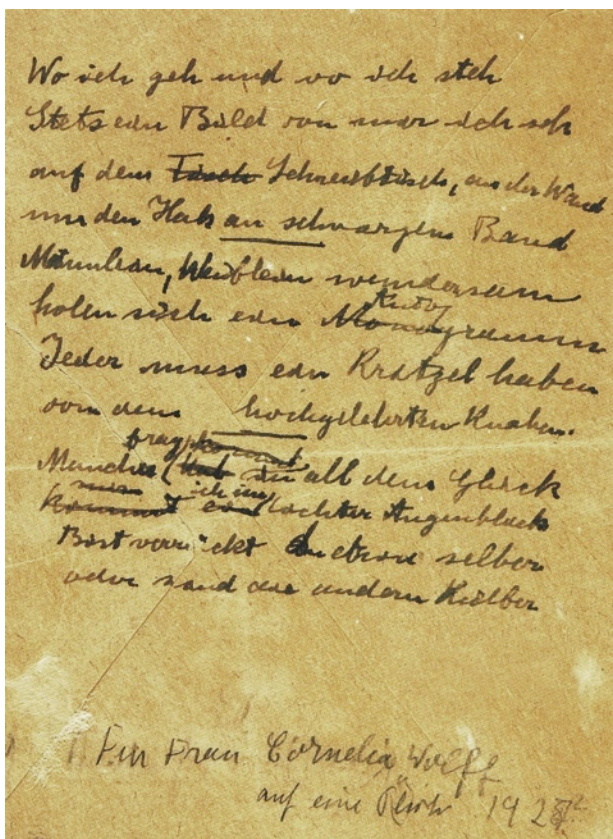
[6-25f]

Was Kepler noch gefehlt hat, ist eine klare Vorstellung von der Dynamik der Kreisbewegung. Die alte Vorstellung, dass die Kreisbahn für Himmelskörper natürlich und *kräftefrei* sei, konnte er noch nicht ganz überwinden. Erst Christiaan Huygens hat die Dynamik der Kreisbewegung klar erfasst und den korrekten Wert für die erforderliche Zentripetalkraft angegeben. Damit standen dann Newton alle Bausteine für seine grosse Synthese zur Verfügung. "Wenn ich weiter als andere gesehen habe, dann nur deshalb, weil ich auf den Schultern von Riesen stand" schreibt Newton im Februar 1675 in wohlkalkulierter Bescheidenheit in einem Brief an Robert Hooke (laut Wikipedia ist das ein Zitat, das auf Didactus Stella zurückgeht). Kepler und Huygens waren zwei dieser Riesen. Galilei, Fermat, Descartes, Pascal und Hooke waren die anderen, die für Newton viel mathematische und physikalische Vorarbeit geleistet haben. Was diese wenigen Männer für Newton waren, das waren für Kopernikus und Kepler die griechischen Geometer und Astronomen.

## L2 Literaturverzeichnis, alphabetisch nach den Autoren

Alley, Carroll. O.: Relativity and Clocks	[39]
Asano, S. und S.: A Novel Concept for Understanding the Special Theory of Relativity	[47]
Bais, Sander: Very Special Relativity	[48]
Born, Max: Die Relativitätstheorie Einsteins	[43]
Boysen, Gerd et al.: Physik Oberstufe Band 2 Grundkurs	[16]
Ciufolini, I. und Pavlis, E.C.: A confirmation of the general relativistic prediction of ...	[40]
Einstein, Albert: Zur Elektrodynamik bewegter Körper	[18]
Einstein, Albert: Ist die Trägheit eines Körper von seinem Energieinhalt abhängig?	[19]
Einstein, Albert: Aus meinen späten Jahren	[20]
Einstein, Albert: Mein Weltbild	[21]
Einstein, Albert: Einstein sagt - Zitate Einfälle Gedanken	[22]
Einstein, Albert: Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie	[29]
Epstein, Lewis Carroll: Relativitätstheorie anschaulich dargestellt	[10]
Epstein, Lewis Carroll: Relativity visualized	[14]
Flachsel, Erwein: Hundertfünfzig Physik-Rätsel	[42]
Fowler, Michael: Die spezielle Relativitätstheorie	[24]
Freund, Jürgen: Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger	[41]
Fritzsch, Harald: Eine Formel verändert die Welt	[34]
Fritzsch, Harald: Die verbogene Raumzeit	[35]
Galilei, Galileo: Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo	[3]
Galilei, Galileo: Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme	[4]
Genz, Henning: Die Entdeckung des Nichts	[28]
Guthmann, Andreas: Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung	[36]
Hermann, Armin: Einstein - der Weltweise und sein Jahrhundert	[30]
Höfling, Oskar et al.: Physik Band II Teil 3 "Quanten und Atome"	[13]
Kepler, Johannes: Astronomia Nova	[5]
Kepler, Johannes: Neue Astronomie	[6]
Kopernikus, Nikolaus: Das neue Weltbild	[9]
Kramer, Michael: Pulsare als kosmische Uhren	[44]
Kranzer, Walter: So interessant ist Physik	[17]
Matter, Mani: Us emene lääre Gygechaschte	[46]
Melcher, Horst: Relativitätstheorie in elementarer Darstellung	[26]
Misner, Charles et al.: Gravitation	[27]
Newton, Isaac: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica	[1]
Newton, Isaac: Die mathematischen Prinzipien der Physik	[2]
Pais, Abraham: Raffiniert ist der Herrgott ...	[7]

Pais, Abraham: Ich vertraue auf Intuition - der andere Einstein	[37]
Rosenkranz, Ze'ev: Einstein - privat und ganz persönlich	[32]
Salim, Wolfgang: Gleichzeitigkeit Schwarze Löcher Gekrümmte Raumzeit	[45]
Sexl, Roman und Schmidt, Herbert K.: Raum Zeit Relativität	[25]
Sexl, Roman et al.: Materie in Raum und Zeit (Physik Band 3)	[8]
Sexl, Roman und Sexl, Hannelore: Weisse Zwerge - Schwarze Löcher	[38]
Stachel, John: Einsteins Annus mirabilis	[12]
Taylor, Edwin F. und Wheeler, John Archibald: Spacetime Physics	[11]
Thorne, Kip S.: Gekrümmter Raum und verbogene Zeit - Einsteins Vermächtnis	[33]
Volkmer, Martin: Basiswissen Kernenergie	[23]
Wheeler, John Archibald: Gravitation und Raumzeit	[15]



Wo ich geh und wo ich steh  
 stets ein Bild von mir ich seh  
 auf dem Schreibtisch, an der Wand  
 um den Hals am schwarzen Band

Männlein, Weiblein wundersam  
 holen sich ein Autogramm  
 Jeder muss ein Kritzel haben  
 von dem hochgelehrten Knaben.

Manchmal frag in all dem Glück  
 ich im lichten Augenblick  
 Bist verrückt du etwa selber  
 oder sind die andern Kälber

für Frau Cornelia Wolff  
 auf eine Photo 1927

Die Reproduktion ist [32-211] entnommen, der Text ist auch in [22-42] zu finden.