4 Rang und Determinante

Der Rang und die Determinante sind zwei Zahlen, die zunächst für Matrizen definiert werden. Es zeigt sich aber, dass diese Werte bei jeder Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung f dieselben sind, also nicht von der speziellen Wahl der Basen abhängen. Damit können wir auch vom Rang oder der Determinante einer linearen Abbildung sprechen.

Definition 4.1. Es sei A eine $m \times n$-Matrix über dem Körper k. Der *Zeilenrang* von A ist definiert als die Anzahl linear unabhängiger *Zeilenvektoren* in A (das sind Vektoren in k^n).

Entsprechend ist der *Spaltenrang* von A definiert als die Zahl der unabhängigen *Spaltenvektoren* in A (das sind Vektoren in k^m).

Bemerkungen: Man spricht nur vom Rang einer Matrix. Wir werden im Satz 4.4 zeigen, dass für alle Matrizen der Zeilenrang gleich gross ist wie der Spaltenrang. Der Rang einer Matrix ist also eine natürliche Zahl. Es gilt $0 \leq \text{rang}(A) \leq \text{Minimum}(m, n)$.

Aufgabe: Bestimmen Sie den Zeilenrang und den Spaltenrang von M:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Satz 4.2. Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix A zu gewählten Basen in V und W. Dann ist der Spaltenrang von A gleich der Dimension des Bildes von f.

Beweis

In den Spalten von A stehen die Bilder der gewählten Basisvektoren von V. (siehe Lemma 3.12 und Satz 3.13). Diese erzeugen aber das Bild von f. dim(Bild von f) ist somit gleich der Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A. $\square$

Ist f eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix A, so gilt also

$$\dim(\text{Kern von } f) + \text{rang}(A) = \dim(V)$$

Das ist eine neue Formulierung von Satz 3.5. Daraus folgt aber schon

Korollar 4.3. Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix A zu gewählten Basen in V und W. Dann ist der Spaltenrang von A unabhängig von der Wahl der Basen in V und W.

Beweis

Der Spaltenrang von A ist ja gleich dim(Bild von f), und diese Dimensionszahl hängt nur von f und nicht von der Wahl der Basen ab. $\square$

Beispiel: Die 2. Ableitung $f : \mathbb{P}_4 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ mit der Basis $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ von $\mathbb{P}_4$ und $\{1, x, x^2\}$ von $\mathbb{P}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Der Spaltenrang von A ist offensichtlich 3. Der Kern von f besteht aus $\mathbb{P}_1$ mit

$$\dim(\text{Kern von } f) = \dim(\mathbb{P}_1) = 2.$$

Es ist

$$\dim(\text{Kern}) + \dim(\text{Bild}) = \dim(\text{Kern}) + \text{rang}(A) = 2 + 3 = 5 = \dim(\mathbb{P}_4).$$

Aufgaben

1. Untersuchen Sie die Projektion $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

   Geben Sie die Darstellungsmatrix A über der Standardbasis, und untersuchen Sie dim(Kern), dim(Bild) und rang(A).

2. Wie **1.**, aber für die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene $x + y + z = 0$.

3. Wie **2.**, aber diesmal nicht mit der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, sondern mit den Basisvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun kommt der technisch wichtige

Satz 4.4. Es sei A die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ über den Basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ von V und $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ von W.

Dann gilt: Der Zeilenrang von A ist gleich dem Spaltenrang von A.

Bemerkung: Daher sprechen wie nur noch vom *Rang* von A, und wir schreiben $r = \text{rang}(A)$.

Beweis

a) Das Umstellen von Zeilen beeinflusst weder den Zeilen- noch den Spaltenrang: Wir haben immer noch dieselben m Zeilenvektoren, die Anzahl der linear unabhängigen darunter (das ist die Dimension ihres Erzeugnisses) hat sich dadurch nicht geändert. Und für den Spaltenrang (also dim(Bild von f)) ändert sich auch nichts, die Operation hat dieselbe Wirkung wie die Vertauschung der entsprechenden Basisvektoren $\vec{a}_j$!

b) Das Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$ ändert weder den Zeilen- noch den Spaltenrang: Wir haben immer noch dasselbe Erzeugnis der Zeilenvektoren, und für den Spaltenrang hat es dieselbe Wirkung wie die Ersetzung eines Basisvektors $\vec{a}_j$ durch $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{a}_j$!

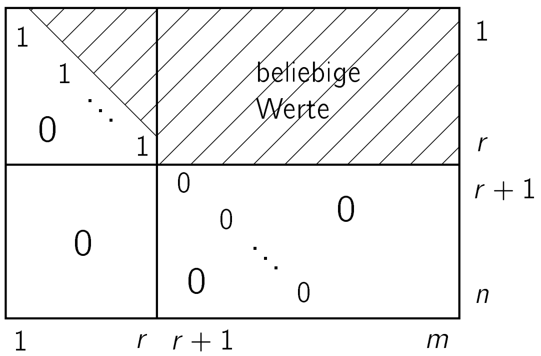
c) Ersetzt man zwei Zeilenvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ von A durch die beiden Vektoren $\vec{u}$ und $(\vec{u}+\vec{v})$, so ändert sich weder der Zeilen- noch der Spaltenrang: Die neuen m Zeilenvektoren haben dasselbe Erzeugnis wie die alten, und für den Spaltenrang hat es dieselbe Wirkung wie die Ersetzung von $\vec{a}_i$ und $\vec{a}_j$ durch $\vec{a}_i$ und $\vec{a}_i - \vec{a}_j$ in der Basis von W. Nach Korollar 4.3 ändert das nichts am Spaltenrang.

d) Die Positionen a), b) und c) bedeuten zusammengenommen, dass wir einen Zeilenvektor der Matrix A durch eine beliebige Linearkombination *von dieser Zeile* und andern ersetzen können, ohne dass sich Zeilen- und Spaltenrang ändern. Dasselbe würde auch für Linearkombinationen von Spalten gelten, doch das brauchen wir nicht.

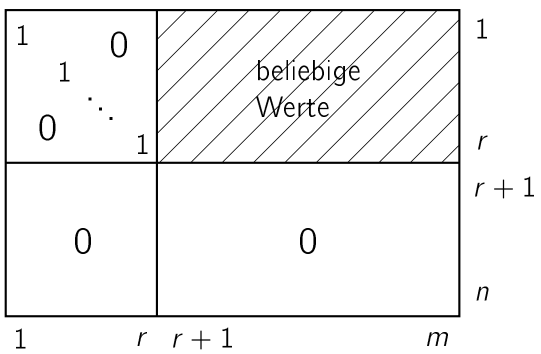
e) Nun kennen wir aus dem Skriptum Algebra_03 den Gauss-Algorithmus, bei dem man nichts anderes macht als Zeilen zu vertauschen oder Zeilen zu ersetzen durch eine Linearkombination dieser Zeile mit andern.

   Dasselbe macht der TR bei den Befehlen ref(A) und rref(A).

ref(A) liefert



rref(A) liefert



Der Prozess endet bei einem *quadratischen* Block links oben, dessen Diagonale aus Einsen besteht. Hat er die Kantenlänge r, so gilt offensichtlich

$$\text{Spaltenrang von } A = r = \text{Zeilenrang von } A. \qquad \square$$

Aufgabe

Bestimmen Sie den Rang von A mit dem Gauss-Algorithmus. Kontrollieren Sie Ihre Rechnungen mit den TR-Befehlen ref(A) und rref(A).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Korollar 4.5. Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Es sei $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$, und A sei eine Darstellungsmatrix von f mit $\text{rang}(A) = r$. Dann gilt

i) f injektiv $\iff \dim(\text{Kern von } f) = 0 \iff \dim(\text{Bild von } f) = n \iff r = n$

ii) f surjektiv $\iff \dim(\text{Bild von } f) = m \iff r = m$

iii) f bijektiv $\iff \dim(\text{Kern von } f) = 0$ und $\dim(\text{Bild von } f) = m \iff n = m = r$

Beweis: Die Beweise sind im wesentlichen bereits geführt oder sie sind offensichtlich. □

Im Spezialfall eines Endomorphismus' von V ergibt sich das

Korollar 4.6. Es sei $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix A über einer gewählten Basis von V. Es sei $\dim(V) = n$ und $\text{rang}(A) = r$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) Kern von $f = \{ \vec{0}_V \}$

ii) $\dim(\text{Kern von } f) = 0$

iii) f ist injektiv

iv) Bild von $f = V$

v) $\dim(\text{Bild von } f) = n$

vi) f ist surjektiv

vii) $r = n$

viii) f ist bijektiv

ix) $[\, \exists\, B \in \mathbb{M}^{n \times n}(k) \,]\, [\, A \cdot B = E \text{ und } B \cdot A = E \,]$

Beweis

Korollar 4.5 für $m = n$ sowie Satz 3.20 für f und f^{-1} für die Äquivalenz von viii) und ix) □

Der Gauss-Algorithmus respektive die TR-Funktionen ref(A) oder rref(A) geben uns also erschöpfend Auskunft über die Eigenschaften einer linearen Abbildung.

Trotzdem definieren wir noch die *Determinante* einer $n \times n$-Matrix über k, allerdings nur für die Fälle von $n = 1, 2, 3$.

Definition 4.7

i) Die Determinante einer 1×1-Matrix (a) ist a.

ii) Die Determinante einer 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $a \cdot d - b \cdot c$.

iii) Die Determinante einer 3×3-Matrix $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ist

$a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - f \cdot h \cdot a - i \cdot b \cdot d$.

Bemerkung: Die Determinante einer Matrix ist also einfach eine Zahl aus k.

Aufgaben

1. Zeigen Sie für 2×2-Matrizen über k

a) $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ im allgemeinen
b) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^2 \cdot \det(A)$
c) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

2. Zeigen Sie für 3×3-Matrizen über k

a) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^3 \cdot \det(A)$
b) (recht aufwendig!) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

3. Beschreiben Sie den Zusammenhang genau

a) zwischen dem Vektorprodukt und einer 2×2-Determinanten
b) zwischen dem Spatprodukt und einer 3×3-Determinanten

4. Zeigen Sie für 2×2-Matrizen A:

$\det(A) = 0 \iff \text{rang}(A) < 2$

5. Zeigen Sie für 3×3-Matrizen A unter Benutzung von **3.**b):

$\det(A) = 0 \iff \text{rang}(A) < 3$

6. Banalerweise gilt für 1×1-Matrizen A

$\det(A) = 0 \iff \text{rang}(A) < 1$

Die Aufgaben **4** bis **6** beweisen für die Dimensionen ≤ 3 einen Satz, der allgemein gilt:

Satz 4.8. Es sei $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix A über einer bestimmten Basis von V. Dann gilt

$$f \text{ ist bijektiv} \iff \det(A) \neq 0$$

Die bijektiven linearen Selbstabbildungen von V, also die Automorphismen von V, bilden eine Gruppe bezüglich der Zusammensetzung $\circ$. Es sind dies eigentlich die Symmetrien des Vektorraumes V. Diese Gruppe nennt man $\mathrm{GL}_n(V)$ oder auch $\mathrm{GL}_n(k)$, wenn k der Zahlkörper ist (GL von general linear group).

Die Sätze 3.20 und 4.8 sagen uns, dass diese Automorphismengruppe von V (als Gruppe!) isomorph ist zur Gruppe $(\mathbb{M}^{n\times n}(k)^\star, \cdot)$, der Gruppe aller $n \times n$-Matrizen, welche eine multiplikative Inverse besitzen. Und dies sind nach Satz 4.8 und Satz 3.20 genau diejenigen, deren Determinante von null verschieden ist! Jede Wahl einer Basis von V stiftet einen Gruppenisomorphismus zwischen den beiden Gruppen.

Ohne Beweis teilen wir noch mit, dass ganz allgemein gilt:

$$[\forall A, B \in \mathbb{M}^{n\times n}(k)]\,[\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)]$$

Dies könnte man auch anders formulieren: Die Determinante stiftet einen Gruppenhomomorphismus von der Menge aller invertierbaren Matrizen auf die multiplikative Gruppe $k^\star$:

$$\det : (\mathbb{M}^{n\times n}(k)^\star, \cdot) \longrightarrow (k \setminus \{0\}, \cdot)$$

Der TR stellt uns die Funktion $\det(\dots)$ für quadratische Matrizen beliebiger Kantenlänge zur Verfügung.

Aufgaben

1. E sei die Einheitsmatrix, welche der identischen Abbildung entspricht (siehe Algebra_03.pdf, p.5). Zeigen Sie für $n = 1, 2, 3$: $\det(E) = 1$.
2. Zeigen Sie, dass nach dem Obgesagten für beliebiges n gilt:
$$\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$$
3. Zeigen Sie für $n = 1, 2, 3$, dass $\det(A)$ **nicht** von der Wahl der Basis abhängt (dieses Resultat gilt ganz allgemein).
4. Bestimmen Sie wieder einmal A^{-1} von Hand mit dem Gauss-Algorithmus für
$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$
Als Zahlkörper k soll $\mathbb{Q}$ dienen.

Zum Schluss wollen wir noch zeigen, wie man mit dem Gauss-Algorithmus die Determinante einer beliebigen $n \times n$-Matrix berechnen kann. Den Beweis können wir natürlich nur für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ führen.

Definition 4.9. Es sei $A \in \mathbb{M}^{n \times n}(k)$, $A = (a_{ij})$. Die *transponierte* Matrix zu A ist definiert durch

$$(A^\mathsf{T})_{ij} = A_{ji}$$

Die transponierte Matrix ist also diejenige, die man erhält, wenn man die Matrix an der Hauptdiagonalen durch a_{11} und a_{nn} spiegelt.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Lemma 4.10. Es sei $A \in \mathbb{M}^{n \times n}(k)$ und A^T sei die transponierte Matrix zu A. Dann gilt

i) $\operatorname{rang}(A^\mathsf{T}) = \operatorname{rang}(A)$

ii) $\det(A^\mathsf{T}) = \det(A)$

Beweis

i) folgt aus dem Satz 4.4: Der Zeilenrang von A^T ist gleich dem Spaltenrang von A, die Ränge der beiden Matrizen sind also dieselben.

ii) Beweis durch Nachrechnen für $n = 2$ und $n = 3$. Es entstehen dieselben Summen von Produkten in einer andern Reihenfolge. □

Für die Berechnung der Determinante spielt es keine Rolle, ob wir mit A oder A^T arbeiten, ob wir mit Zeilenvektoren oder mit Spaltenvektoren operieren. Diese Einsicht erleichtert uns den Beweis des folgenden Lemmas in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$:

Lemma 4.11. Es sei $A \in \mathbb{M}^{n \times n}(k)$. Dann gilt

i) Das Vertauschen zweier benachbarter Zeilenvektoren von A ändert das *Vorzeichen* von $\det(A)$.

ii) Die Multiplikation eines Zeilenvektors von A mit einer Zahl $\lambda \in k$ liefert eine Matrix mit der λ-fachen Deterinante.

iii) Ersetzt man einen Zeilenvektor durch die Summe *dieses* Zeilenvektors mit einem Vielfachen eines andern Zeilenvektors, so ändert sich die Determinante *nicht*.

Beweis

2d: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$

det(A) ist die z-Komponente von $\vec{u} \times \vec{v}$

3d: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$

$\det(A) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Nun beweisen wir i), ii), iii), indem wir die entsprechenden Operationen mit den Spaltenvektoren vornehmen (oder, nach Lemma 4.10, mit A^T arbeiten!).

i) folgt für $n = 2$ **und** $n = 3$ aus der Anti-Kommutativität des Vektorprodukts (der Beweis könnte auch durch simples Nachrechnen geführt werden)

ii) folgt aus $(\lambda \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

iii) folgt aus $(\vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}) \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} + \lambda \cdot (\vec{v} \times \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{v} + \lambda \cdot \vec{0} = \vec{u} \times \vec{v}$ □

Wir haben die Beweise wieder nur für $n = 2$ und $n = 3$ geführt, die Aussagen gelten aber allgemein. Nun fahren wir noch die Ernte ein:

Satz 4.12. Es sei $A \in \mathbb{M}^{n \times n}(k)$. Mit dem Gauss-Algorithmus kann auch det(A) bestimmt werden.

Beweis

Der Gauss-Algorithmus benutzt wiederholt Schritte, wie sie im Lemma 4.11 aufgeführt sind. Bei jedem dieser Schritte wissen wir jetzt, wie sich die (anfänglich unbekannte) Determinante von A verändert. Schliesslich landen wir bei E (mit der Determinanten 1) oder bei einer Matrix mit einem Rang $< n$. Dann ist die Determinante von A sowieso 0.

Es ist also $\det(A) = 0$ oder es gilt

$$\det(A) \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot \ldots \cdot s_i = \det(E) = 1,$$

wodurch det(A) bestimmt ist. s_1, s_2 usw. sind die Veränderungen, welche det(A) beim Schritt 1, Schritt 2 usw. des Gauss-Algorithmus erfährt. □

Wir betrachten dazu natürlich noch ein Beispiel:

Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen gleichzeitig A^{-1}, $\det(A)$ und den Rang von A mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{rccc|ccc}
 & 4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 7 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array} \qquad \det = \det(A) = x$$

$$\begin{array}{rccc|ccc}
\frac{1}{4}\cdot\mathrm{I} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
\mathrm{II} & 7 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
\mathrm{III} & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array} \qquad \begin{array}{l} \det = x \cdot \frac{1}{4} \\ \text{nach Lemma 4.11 ii)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc|ccc}
\mathrm{I} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
\mathrm{II}-7\cdot\mathrm{I} & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 1 & 0 \\
\mathrm{III}-4\cdot\mathrm{I} & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{array} \qquad \begin{array}{l} \det = x \cdot \frac{1}{4} \\ \text{nach Lemma 4.11 iii)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc|ccc}
\mathrm{I} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
2\cdot\mathrm{II} & 0 & 5 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 2 & 0 \\
-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}
\end{array} \qquad \begin{array}{l} \det = (x\cdot\frac{1}{4})\cdot 2\cdot(-\frac{1}{2}) = x\cdot(-\frac{1}{4}) \\ \text{nach Lemma 4.11 ii)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc|ccc}
\mathrm{I} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
\mathrm{III} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\
\mathrm{II} & 0 & 5 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 2 & 0
\end{array} \qquad \begin{array}{l} \det = x \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot (-1) = x \cdot \frac{1}{4} \\ \text{nach Lemma 4.11 i)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc|ccc}
\mathrm{I}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\
\mathrm{II} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\
\mathrm{III}-5\cdot\mathrm{II} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -6 & 2 & \frac{5}{2}
\end{array} \qquad \begin{array}{l} \det = x \cdot \frac{1}{4} \\ \text{nach Lemma 4.11 iii)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc|ccc}
\mathrm{I}-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III} & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\
\mathrm{II} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\
2\cdot\mathrm{III} & 0 & 0 & 1 & -12 & 4 & 5
\end{array} \qquad \det = (x \cdot \tfrac{1}{4}) \cdot 2 = \underline{x \cdot \tfrac{1}{2} \overset{!}{=} 1}$$

Somit $\operatorname{rang}(A) = 3$, $\det(A) = 2$ und $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -12 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Aufgaben

1. Gegeben ist $A \in \mathbb{M}^{3\times 3}(\mathbb{Z}_7)$. Bestimmen Sie von Hand sowohl A^{-1} als auch $\det(A)$. Prüfen Sie alle Ihre Rechnungen mit dem TR ...

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{v}$, wo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Betrachten Sie A als lineare Abbildung von $\mathbb{Q}^5$ nach $\mathbb{Q}^5$. Was ist der Kern von A? Welches ist der Rang von A? Welchen Wert hat demnach die Determinante von A?

Finden Sie *eine* Lösung des Gleichungssystems? Welches sind dann *alle* Lösungen?

3. Die Determinante von A ist 5. Welches ist dann die Determinante von $B \cdot A \cdot B^{-1}$, wenn B eine invertierbare Matrix ist?

4. Wenn Sie es noch nicht gemacht haben: Programmieren Sie eine Funktion matinver(m,p), welcher Sie eine Matrix m und eine Primzahl p übergeben können und die Ihnen, falls m invertierbar ist, $m^{-1} \in \mathbb{M}^{n\times n}(\mathbb{Z}_p)$ zurückliefert. m^{-1} sollte nur natürliche Zahlen von 0 bis $p-1$ enthalten.

Version 2.3, vom Juli 2011

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld, ab 1999

Mit LaTeX in eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp im Oktober 2011