3 Lineare Abbildungen und Matrizen

Definition 3.1. Es seien V und W zwei Vektorräume über demselben Zahlkörper k. Eine Abbildung

$$f : V \longrightarrow W$$

heisst *linear*, falls gilt

i) $[\forall \lambda \in k]\,[\forall \vec{v} \in V]\,[f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v})]$

ii) $[\forall \vec{v}, \vec{w} \in V]\,[f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})]$

Lineare Abbildungen sind also diejenigen Abbildungen, die mit den Rechenregeln in den Vektorräumen ‚harmonieren'.

Beispiele

1. Die Projektion $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2. Die Projektion $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Eine zentrische Streckung $\lambda \cdot \mathbb{1} : V \longrightarrow V, \quad \vec{v} \longmapsto \lambda \cdot \vec{v}$

4. Die Ableitung $' : \mathbb{P}_5 \longrightarrow \mathbb{P}_4, \quad \text{polynom} \longmapsto \text{polynom}'$

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 \\ &\longmapsto a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + 5 \cdot a_5 \cdot x^4 \end{aligned}$$

5. Die Multiplikation mit einer bestimmten 1×3-Matrix:

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

6. Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$ (ein Ortsvektor)

Klären wir noch die Kleinigkeiten:

Lemma 3.2. Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

i) $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

ii) $f(-\vec{v}) = -1 \cdot f(\vec{v}) = -f(\vec{v})$

Beweis

i) $f(\vec{0}_V) = f(0 \cdot \vec{v}) = 0 \cdot f(\vec{v}) = 0 \cdot \vec{w} = \vec{0}_W$ (Lemma 1.2 und Linearität von f)

ii) $f(-\vec{v}) = f((-1) \cdot \vec{v}) = (-1) \cdot f(\vec{v}) = -f(\vec{v})$ (Lemma 1.2 und Linearität von f) □

Definition 3.3. Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Wir definieren

i) *Kern* von $f := \{\, \vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_W \,\}$

ii) *Bild* von $f := \left\{ \vec{w} \in W \mid [\,\exists\, \vec{v} \in V]\,[\,\vec{w} = f(\vec{v})\,] \right\}$

Aufgabe: überlegen Sie sich zu allen vorangegangenen Beispielen von linearen Abbildungen, was jeweils der Kern und das Bild von f umfassen!

Satz 3.4. Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

i) Der Kern von f ist ein Unterraum von V

ii) Das Bild von f ist ein Unterraum von W

Beweis

i) Es seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Vektoren im Kern von f. Dann gilt $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, also ist auch $\vec{u} + \vec{v}$ im Kern von f. Ebenso gilt $f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

ii) Ist $\vec{w} = f(\vec{v})$ und $\vec{x} = f(\vec{u})$, so ist $\vec{w} + \vec{x} = f(\vec{v} + \vec{u})$. Mit $\vec{w} \in \text{Bild}(f)$ und $\vec{x} \in \text{Bild}(f)$ liegt also auch $\vec{w} + \vec{x}$ im Bild von f. Und ist $\vec{w}$ ein Vektor im Bild von f, dann gibt es einen Vektor $\vec{v} \in V$ mit $f(\vec{v}) = \vec{w}$, und für jedes λ ist auch $\lambda \cdot \vec{w} = \lambda \cdot f(\vec{v}) = f(\lambda \cdot \vec{v})$ ein Vektor im Bild von f. □

Satz 3.5. Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\dim(\text{Kern von } f) + \dim(\text{Bild von } f) = \dim(V)$$

Beweis

Nach dem Lemma 2.6 gibt es eine Basis von V der Art $\{\, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}, \ldots, \vec{e}_n \,\}$ sodass $\{\, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m \,\}$ eine Basis des Kerns von f bilden und zudem für alle $\vec{e}_i$ mit $i > m$ gilt $f(\vec{e}_i) \neq \vec{0}_W$.

Wegen $\dim(\text{Kern}) = m$ und $\dim(V) = n$ müssen wir noch zeigen, dass gilt $\dim(\text{Bild von } f) = n - m$.

Wären aber nicht alle $n - m$ Vektoren $f(\vec{e}_i)$ mit $i > m$ linear unabhängig, so gäbe es nach Satz 2.4 eine Linearkombination

$$\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \cdot f(\vec{e}_i) = \vec{0}_W,$$

wobei mindestens **ein** $\lambda_i \neq 0$ ist. Wegen der Linearität von f wäre dann aber

$$f\left(\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{e}_i\right) = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \cdot f(\vec{e}_i) = \vec{0}_W$$

Es gäbe noch einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}_V$ im Erzeugnis von $\{\, \vec{e}_{m+1}, \ldots, \vec{e}_n \,\}$ mit $f(\vec{v}) = \vec{0}_W$. Dieser Vektor gehört dann zum Kern von f und müsste schon zum Erzeugnis von $\{\, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m \,\}$ gehören, dies im Widerspruch dazu, dass $\{\, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \,\}$ eine Basis von V bilden.

Die $n - m$ Vektoren $f(\vec{e}_i)$ mit $i > m$, sind also linear unabhängig und erzeugen damit das Bild von f von der Dimension $n - m$. □

Satz 3.6. Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung, und es sei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ eine Basis von V. Dann ist f vollständig bestimmt durch die n Bildvektoren der Basisvektoren.

Beweis

Es seien also $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)$ gegeben. Dann gilt für jeden Vektor $\vec{v} \in V$:

Es gibt eine eindeutig bestimmte Linearkombination für $\vec{v}$

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n \quad \text{(Lemma 2.5)}$$

und wegen der Linearität von f gilt damit

$$f(\vec{v}) = \lambda_1 \cdot f(\vec{e}_1) + \lambda_2 \cdot f(\vec{e}_2) + \ldots + \lambda_n \cdot f(\vec{e}_n)$$

$f(\vec{v})$ ist somit durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig festgelegt. □

Eine andere Formulierung von Satz 3.6 ist der folgende

Satz 3.7. Es seien V, W Vektorräume über k, und zudem sei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ eine Basis von V. Jede beliebige Wahl von n Vektoren in W, also etwa $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} \subset W$, definiert eine lineare Abbildung von V nach W durch $f(\vec{e}_i) = \vec{a}_i$.

Beweis

An die Vektoren $\vec{a}_i \in W$ werden überhaupt keine Forderungen gestellt, sie könnten z. B. auch alle identisch sein! Nach Satz 3.6 ist per Linearität für **jeden** Vektor $\vec{v} \in V$ ein Bildvektor eindeutig festgelegt durch

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(\lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n) \\ &= \lambda_1 \cdot f(\vec{e}_1) + \lambda_2 \cdot f(\vec{e}_2) + \ldots + \lambda_n \cdot f(\vec{e}_n) \\ &= \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n \end{aligned}$$

Eine derart definierte Abbildung f ist offensichtlich linear. □

Definition 3.8. Es seien V und W zwei Vektorräume über k. Eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heisst ein *Vektorraum-Isomorphismus*, wenn f bijektiv ist.

Vergleichen Sie mit der Definition von Gruppen-Isomorphismen im Skriptum Algebra_05!

Definition 3.9. Es seien V und W zwei Vektorräume über k. V und W heissen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $f : V \longrightarrow W$ gibt.

Isomorphe Vektorräume unterscheiden sich nicht in ihrer Struktur als VR, sondern nur in der Schreibweise oder der ‚Interpretation'.

Beispiele

1. Isomorph zu $\mathbb{R}^4$ ist z. B. $\mathbb{M}^{2\times 2}(\mathbb{R})$
2. Isomorph zu $\mathbb{R}^3$ ist $\mathcal{R}$, aber auch $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
3. Isomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist nebst $\mathcal{E}$ etwa noch der VR der 2×2-Diagonalmatrizen $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$.

Satz 3.10. Es sei V ein VR über k mit $\dim(V) = n$. Dann ist V isomorph zu k^n.

Beweis

Jede Wahl einer Basis in V stiftet eine bijektive Zuordnung $\vec{v} \longmapsto (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, da die Darstellung von $\vec{v}$ über der gewählten Basis eindeutig ist. Diese Abbildung von V auf k^n ist linear und bijektiv! $\square$

Korollar 3.11. Es seien V und W Vektorräume über k. V und W sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.

Beweis

Es ist $V \cong k^n$ und $W \cong k^m$, wenn $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$.

Ist $m \neq n$, also oBdA $m > n$, so kann keine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ bijektiv sein, da nach Satz 3.5 gilt $\dim(\text{Bild von } f) \leq \dim(V) = n < m$. Ist aber $n = m$, so sind sowohl V als auch W isomorph zu $k^n = k^m$ nach Satz 3.10. Die Zusammensetzung von zwei Bijektionen ist aber wieder bijektiv. $\square$

Es gibt also (bis auf isomorphe Abwandlungen) nur **einen** VR der Dimension n über k! k^n ist der typische Vertreter aller n-dimensionalen Vektorräume über k. Dies macht die Sache aber nicht langweilig – das Erstaunliche ist vielmehr, dass es so viele interessante ‚Inkarnationen' dieses Vektorraumes gibt!

Die Tatsache, dass V isomorph ist zu k^n, wenn $n = \dim(V)$, werden wir ausnützen, um lineare Abbildungen mit Matrizen zu verbinden. Im folgenden gehen wir davon aus, dass Sie mit der Matrizenrechnung etwa im Umfang von Algebra_03 vertraut sind. Sonst sollten Sie sich zuerst mit dem Studium dieses Skriptums aus dem Teil „Körper, Ringe, Gruppen, RSA und PGP" mit der Matrizenrechnung vertraut machen.

Lemma 3.12. Es seien V und W Vektorräume über k, und mit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ sei eine Basis von V und mit $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ eine Basis von W gewählt. Dann ist durch jede lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ eindeutig eine lineare Abbildung $\tilde{f} : k^n \longrightarrow k^m$ festgelegt.

Beweis

Es sei $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in k^n$. Dann ist $\vec{w} = \lambda_1 \cdot f(\vec{e}_1) + \lambda_2 \cdot f(\vec{e}_2) + \ldots + \lambda_n \cdot f(\vec{e}_n)$ eindeutig bestimmt, und zu $\vec{w} \in W$ gehört ein eindeutig bestimmtes Element von k^m mit

$$\mu_1 \cdot \vec{a}_1 + \mu_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \mu_m \cdot \vec{a}_m = \vec{w}.$$

Setze
$$\tilde{f}\big((\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\big) := (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m).$$
$\square$

Die Mathematiker drücken das auch folgendermassen aus: Sie sagen, dass *das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] & W \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\ k^n \arrow[r, "\tilde{f}"] & k^m \end{tikzcd}$$

Der Isomorphismus zwischen V und k^n respektive derjenige zwischen W und k^m ist durch die jeweilige Wahl einer Basis festgelegt.

Zu jeder linearen Abbildung von V nach W gehört also (nach der Wahl zweier Basen!) genau eine lineare Abbildung von k^n nach k^m. Die linearen Abbildungen von k^n nach k^m entsprechen aber genau den $m \times n$-Matrizen über k, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 3.13. Es sei f eine lineare Abbildung von k^n nach k^m. Dann ist $A \in \mathbb{M}^{m\times n}(k)$ eindeutig bestimmt mit $f(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$ für alle $\vec{v} \in k^n$.

Beweis

Betrachte die Standard-Basen
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$
in k^n und in k^m.

f legt die Bilder von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ eindeutig fest, das sind Vektoren in k^m, also Zahlspalten der Länge m. Anderseits ist f auch durch diese Bilder der Basisvektoren vollständig bestimmt nach Satz 3.6.

Bilde nun

$$A = \begin{pmatrix} \\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_n) \\ \\ \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^{m \times n}(k)$$

Für jeden Basisvektor $\vec{e}_i$ gilt dann $f(\vec{e}_i) = A \cdot \vec{e}_i$.

Prüfe z. B. $f(\vec{e}_2) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$!

Bei jeder anderen Wahl von A kann nicht für jeden Vektor gelten $f(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$ $\square$

Bevor wir zu den Beispielen und Aufgaben kommen, wollen wir diesen Sachverhalt noch etwas komplizierter ausdrücken.

Satz 3.14. Es seien V und W zwei Vektorräume über k. Dann bildet die Menge aller linearen Abbildungen $f : V \longrightarrow W$ selber einen Vektorraum über k durch die Definitionen

i) $(f + g)(\vec{v}) := f(\vec{v}) + g(\vec{v})$

ii) $(\lambda \cdot f)(\vec{v}) := \lambda \cdot f(\vec{v})$

Beweis

Die Addition der Abbildungen erbt alle nötigen Eigenschaften von der Addition in W, Neutralelement ist die Abbildung $n : \vec{v} \longmapsto \vec{0}_W$ für alle $\vec{v} \in V$ (der Kern von n ist V) und die Linearität der Summe ist auch gegeben. Ähnliches gilt für die ‚Zusammenarbeit' mit der externen Multiplikation. $\square$

Korollar 3.15. Es seien V und W zwei VRe über k, mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Dann ist der VR der linearen Abbildungen von V nach W isomorph zu $\mathbb{M}^{m \times n}(k)$.

Beweis

Nach der Wahl zweier Basen (eine in V, eine in W) gibt es zu jeder linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ genau eine lineare Abbildung $\tilde{f} : k^n \longrightarrow k^m$ nach Lemma 3.12. Nach Satz 3.13 gibt es aber zu $\tilde{f}$ genau eine Matrix $A \in \mathbb{M}^{m \times n}(k)$. Diese Zuordnungen sind nach der Wahl der Basen bijektiv und linear:

$$\begin{array}{cl} f : V \longrightarrow W & \\ \updownarrow & \text{Wahl der Basen in } V \text{ und } W \\ \tilde{f} : k^n \longrightarrow k^m & \\ \updownarrow & \text{Standard-Basen in } k^n \text{ und } k^m \\ A \in \mathbb{M}^{m \times n}(k) \text{ mit } A \cdot \vec{v} = \tilde{f}(\vec{v}) & \end{array}$$

$\square$

Korollar 3.16. Der VR aller linearen Abbildungen von V nach W hat die Dimension $\dim(V)\cdot\dim(W)$.

Beweis

Dieser VR ist nach Korollar 3.15 isomorph zu $\mathbb{M}^{m\times n}(k)$ und hat also auch die Dimension $m \cdot n$, wenn $n = \dim(V)$ und $m = \dim(W)$. □

Bemerkung: Wählt man Basen in V und W, so gehört zu jeder Abbildung $f : V \longrightarrow W$ genau eine ‚Darstellungsmatrix' aus $\mathbb{M}^{m\times n}(k)$. Wählt man aber andere Basen, so gehört zur selben Abbildung f eine andere Matrix. Genaueres dazu folgt ab der Seite 10.

Zeigen Sie selber noch den folgenden kleinen

Satz 3.17. Es seien V und W VRe über k, und es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:

i) f ist ein Isomorphismus.

ii) $\dim(\text{Kern von } f) = 0$ und $\dim(\text{Bild von } f) = \dim(W)$.

Beweis: Übungsaufgabe. □

Beispiele

1. Wir betrachten $\mathbb{P}_4$ mit der Standardbasis $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ und dann auch $\mathbb{P}_3$. Das Bilden der ersten Ableitung ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{P}_4$ nach $\mathbb{P}_3$.

   Beschreiben Sie diese Abbildung durch eine Matrix. Leiten Sie dann ein Polynom 4. Grades per Matrixmultiplikation ab. Was ist der Kern dieser Abbildung?

2. Beschreiben Sie die Spiegelung an der y-Achse in $\mathcal{E} \cong \mathbb{R}^2$ über der Standard-Basis durch eine Matrix. Spiegeln Sie den Punkt $(7/-3)$ per Matrix-Multiplikation!

3. Wie **2.**, aber für die Drehstreckung um den Nullpunkt mit Drehwinkel 45ř und Streckungsfaktor $\sqrt{2}$.

4. Wie **2.**, aber für die Drehung um den Nullpunkt mit Drehwinkel φ.

5. Welche Abbildungen der Ebene $\mathcal{E}$ werden durch die folgenden Matrizen beschrieben (immer über der Standardbasis):
$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

6. Beschreiben Sie die Spiegelung an der xy-Ebene in $\mathcal{R} \cong \mathbb{R}^3$ über der Standardbasis durch eine Matrix.

7. Wie **6.**, aber für die Rotation um die $(1/1/1)$-Diagonale eines Würfels, welche die x-Achse auf die y-Achse, die y-Achse auf die z-Achse und diese wiederum auf die x-Achse abbildet.

8. Stellen Sie selber einige Symmetrieoperationen des Würfels durch Matrizen dar.

Definition 3.18. Eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ heisst auch ein *Endomorphismus* von V.

Da bei einem Endomorphismus die bisherigen Rollen von V und W zusammenfallen und somit $\dim(V) = \dim(W)$ immer erfüllt ist, können wir aus den bisherigen Sätzen eine Reihe von Korollaren ableiten.

Korollar 3.19. Nach der Wahl einer Basis im VR V gehört zu jedem Endomorphismus von V genau eine Matrix aus $\mathbb{M}^{n\times n}(k)$, wenn $n = \dim(V)$, und durch jede Matrix aus $\mathbb{M}^{n\times n}(k)$ ist ein Endomorphismus von V definiert.

Beweis: Korollar 3.15, für $V = W$. $\square$

Lineare Abbildungen von V nach V lassen sich zusammensetzen (oder hintereinander ausführen). Eine kleine Sensation liefert dazu der folgende Satz:

Satz 3.20. Es seien f und g Endomorphismen von V. F und G seien die Darstellungsmatrizen von f und g über einer bestimmten Basis.

Dann ist $F \cdot G$ die Darstellungsmatrix von $f \circ g$, wo $\cdot$ für die Matrixmultiplikation in $\mathbb{M}^{n\times n}(k)$ steht.

Beweis

Wir erweitern das Schema zum Beweis von Lemma 3.12:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\text{iso}"'] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\text{iso}"'] & V \arrow[d, "\text{iso}"'] \\
k^n \arrow[r, "\tilde{g}"] & k^n \arrow[r, "\tilde{f}"] & k^n
\end{tikzcd}$$

Basiswahl!

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(\vec{v}) &= (\text{iso}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{g} \circ \text{iso})(\vec{v}) = \text{iso}^{-1} \circ \tilde{f}\big(\tilde{g}(\text{iso}(\vec{v}))\big) \\
&= \text{iso}^{-1} \circ \tilde{f}\big(G \cdot (\text{iso}(\vec{v}))\big) = \text{iso}^{-1} \circ F \cdot \big(G \cdot (\text{iso}(\vec{v}))\big) \\
&= \text{iso}^{-1} \circ \big((F \cdot G) \cdot (\text{iso}(\vec{v}))\big)
\end{aligned}$$

Also ist die Darstellungsmatrix von $f \circ g$ eben $F \cdot G$. Wir haben nur die Assoziativität der Matrix-Multiplikation gebraucht! $\square$

Bijektive Endomorphismen heissen auch *Automorphismen*. Das sind also bijektive lineare Selbstabbildungen von einem VR V. Zeigen Sie noch

Lemma 3.21. Es sei f ein Endomorphismus von V. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) f ist bijektiv

ii) $\dim(\text{Kern von } f) = 0$

iii) $\dim(\text{Bild von } f) = \dim(V)$

Beweis: Übungsaufgabe. □

Es folgt eine anspruchsvolle Zusatzaufgabe:

Betrachtet wird der VR $\mathrm{SMQ}_3(\mathbb{Z}_7)$, also die Menge aller supermagischen Quadrate der Kantenlänge 3 über $k = \mathbb{Z}_7$.

- Zeigen Sie, dass die folgenden drei Matrizen eine Basis bilden von $\mathrm{SMQ}_3(\mathbb{Z}_7)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie $D \in \mathrm{SMQ}_3(\mathbb{Z}_7)$ und stellen Sie D als Linearkombination von A, B und C dar:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{SMQ}_3(\mathbb{Z}_7)$ ist also isomorph zu $(\mathbb{Z}_7)^3$. Durch die Wahl der Basis $\{ A, B, C \}$ ist ein ganz bestimmter Isomorphismus gestiftet. Welches supermagische Quadrat gehört zum Tripel

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_7)^3\,?$$

- Zeigen Sie, dass die Rotation um $-90°$ eine lineare Abbildung in $\mathrm{SMQ}_3(\mathbb{Z}_7)$ ist:

  Beispiel:
$$\mathrm{rot}(D) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- Welche Matrix aus $\mathbb{M}^{3\times 3}(\mathbb{Z}_7)$ stellt diese lineare Abbildung rot dar über der Basis $\{ A, B, C \}$? Beachten Sie, dass diese Matrix keineswegs supermagisch sein muss!

Erweiterung

Ist f ein Endomorphismus von V, so gehört zu jeder Basis $(\vec{a_i})$ von V eine Darstellungsmatrix A für f mit

$$f(\vec{v}) = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{wo} \quad \vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a_n}$$

Wählen wir eine andere Basis von V, z. B. $(\vec{c_i})$, so gehört zu derselben Abbildung f eine andere DM C mit

$$f(\vec{v}) = C \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \quad \text{wo} \quad \vec{v} = \mu_1 \cdot \vec{c_1} + \mu_2 \cdot \vec{c_2} + \ldots + \mu_n \cdot \vec{c_n}$$

In welcher Beziehung stehen nun die beiden Matrizen A und C, welche über verschiedenen Basen dieselbe Abbildung beschreiben?

Beachten wir, dass die Wahl einer Basis gleichbedeutend ist damit, einen Isomorphismus zwischen V und k^n zu installieren, dann ergibt sich die Antwort von selber:

$$\begin{tikzcd}
k^n \arrow[r, "A \cdot \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\sim"'] \arrow[dr, phantom, "\text{Wahl der Basis } \vec{a_i}"] & k^n \arrow[d, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[dd, bend left=60, "B^{-1} \cdot \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}", "\sim"'] \\
V \arrow[r, "f"] & V \\
k^n \arrow[u, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[r, "C \cdot \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}"'] \arrow[uu, bend left=60, "B \cdot \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}", "\sim"'] \arrow[ur, phantom, "\text{Wahl der Basis } \vec{c_i}"] & k^n \arrow[u, leftrightarrow, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm *kommutiert.* Da die Zusammensetzung zweier Isomorphismen wieder ein Isomorphismus ist, gibt es eine Bijektion von k^n auf k^n, welche durch die Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix B realisiert werden kann.

$$\text{Für alle Vektoren } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ in } k^n \text{ gilt: } C \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A \cdot B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es existiert also eine invertierbare Matrix B mit $C = B^{-1} \cdot A \cdot B$.

Satz 3.22. Es sei f ein Endomorphismus von V. A und C seien Darstellungsmatrizen für f über verschiedenen Basen von V. Dann existiert eine invertierbare Matrix B mit

$$C = B^{-1} \cdot A \cdot B \quad \text{oder} \quad B \cdot C \cdot B^{-1} = A$$

□

Die Matrix B ist nicht eindeutig bestimmt. Mit B ist zum Beispiel auch $\lambda \cdot B$ ($\lambda \neq 0$) eine Lösung. Jede Abbildung, welche die Basisvektoren ($\vec{c_i}$) auf beliebige Vielfache der Basisvektoren ($\vec{a_i}$) abbildet, leistet das Gewünschte.

Definition 3.23. Zwei Matrizen A und B aus $\mathbb{M}^{n\times n}(k)$ heissen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{M}^{n\times n}(k)$ gibt mit $C = B^{-1} \cdot A \cdot B$.

Sind zwei Matrizen ähnlich, so schreiben wir auch $A \simeq C$.

Lemma 3.24. Für alle Matrizen A, B und C aus $\mathbb{M}^{n\times n}(k)$ gilt

i) $A \simeq A$

ii) $A \simeq B \implies B \simeq A$

iii) $A \simeq B$ und $B \simeq C \implies A \simeq C$

Die Ähnlichkeit stiftet also eine *Äquivalenzrelation* auf $\mathbb{M}^{n\times n}(k)$, die Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Die Beweise zu Lemma 3.24 sind der Inhalt der folgenden Aufgabe 1.

Aufgaben

1. Beweisen Sie das Lemma 3.24.

2. Suchen Sie weitere Beispiele von Äquivalenzrelationen (innerhalb und ausserhalb der Mathematik).

3. Zeigen Sie, dass die Matrizen A und C ähnlich sind:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 11 & -11 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Zeigen Sie, dass die beiden Matrizen A und C ähnlich sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -11 & 24 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Version 2.4, vom Januar 2015

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld, ab 1999

Mit LaTeX in eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp, Bergün ab September 2011