

1 Vektorräume

Ein *Vektorraum* ist immer ein Vektorraum über einem bestimmten *Zahlkörper*. Der Begriff des *Körpers* wird hier vorausgesetzt. Wir kennen bereits die folgenden Beispiele von Körpern:

$$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p \text{ (} p \text{ prim)}$$

Die ganzen Zahlen \mathbb{Z} oder z. B. die Restklassen \mathbb{Z}_6 bilden keinen Körper, da nicht alle von null verschiedenen Elemente ein multiplikatives Inverses besitzen. \mathbb{Z} und \mathbb{Z}_6 bilden nur einen *kommutativen Ring*. Mehr dazu finden Sie in den Skripten Algebra_01.pdf und Algebra_03.pdf.

Definition 1.1. Es sei ein Körper $(k, +, \cdot)$ gegeben (die *Zahlen*) sowie eine Menge V (die *Vektoren*). In V sei eine interne Operation \oplus definiert. Zudem existiere eine externe Operation $*$ von k auf V :

$$\begin{aligned} * : k \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, \vec{v}) &\longmapsto \lambda * \vec{v} \end{aligned}$$

V ist ein *Vektorraum über k* , wenn die erwähnten Operationen den folgenden Axiomen genügen:

- i) $[\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V] [\vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w}) = (\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w}]$
- ii) $[\exists \vec{0} \in V] [\forall \vec{u} \in V] [\vec{u} \oplus \vec{0} = \vec{u}]$
- iii) $[\forall \vec{u} \in V] [\exists \vec{v} \in V] [\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{0}]$
- iv) $[\forall \vec{u}, \vec{v} \in V] [\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}]$
- v) $[\forall \lambda, \mu \in k] [\forall \vec{u} \in V] [\lambda * (\mu * \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) * \vec{u}]$
- vi) $[\forall \vec{u} \in V] [1 * \vec{u} = \vec{u}]$
- vii) $[\forall \lambda \in k] [\forall \vec{u}, \vec{v} \in V] [\lambda * (\vec{u} \oplus \vec{v}) = \lambda * \vec{u} \oplus \lambda * \vec{v}]$
- viii) $[\forall \lambda, \mu \in k] [\forall \vec{u} \in V] [(\lambda + \mu) * \vec{u} = \lambda * \vec{u} \oplus \mu * \vec{u}]$

Diese Definition eines Vektorraumes hätten wir auch folgendermassen umschreiben können:

Es sei ein Körper $(k, +, \cdot)$ gegeben sowie eine weitere Menge V von Objekten. V ist ein Vektorraum über k , wenn

- i) eine Addition \oplus in V existiert, die V zu einer kommutativen Gruppe macht.
- ii) eine externe Multiplikation $*$ von k auf V existiert, für welche die Rechengesetze v) bis viii) gelten.

Die Rechengesetze v) bis viii) bedeuten, dass die internen Operationen $+$ und \cdot im Körper k ‚brav‘ mit der internen Operation \oplus in V und der externen Operation $*$ von k auf V zusammenspielen. Gerade *weil* diese Rechengesetze gelten, werden wir künftig für die Addition von Zahlen und die Addition von Vektoren dasselbe Operationssymbol $+$ verwenden. Ebenso werden wir auch für die externe Multiplikation $*$ das gewöhnliche Symbol \cdot verwenden, welches auch für die Multiplikation von Zahlen aus k verwendet wird.

Dass die Operationen in k und V schön oder erwartungsgemäss zusammenspielen, ist auch der Inhalt des folgenden Lemmas:

Lemma 1.2. Es sei V ein Vektorraum über k . Dann gilt

- i) $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ für alle $\vec{u} \in V$
- ii) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ für alle $\lambda \in k$
- iii) $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$ für alle $\vec{u} \in V$ (mit $-\vec{u}$ bezeichnen wir das additive Inverse von \vec{u})
- iv) $(-\lambda) \cdot \vec{u} = -(\lambda \cdot \vec{u})$ für alle $\lambda \in k$ und alle $\vec{u} \in V$

Beweis:

Übungsaufgabe! Führen Sie jede dieser Behauptungen auf die Axiome zurück oder auf eine Behauptung, die Sie schon bewiesen haben. □

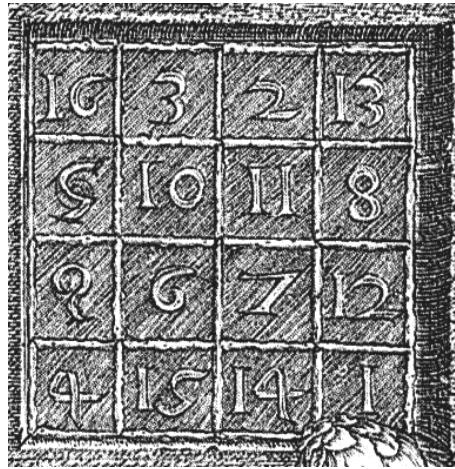
Vektorräume (im folgenden kurz VR) sind in der Mathematik und auch in der Physik sehr weit verbreitet. Das heisst, dass es enorm viele Anwendungen und entsprechend auch eine breite Palette von Beispielen gibt. Sie können jetzt schon eine lange Liste von Beispielen verstehen:

1. \mathcal{E} , die Vektoren der euklidischen Ebene als VR über \mathbb{R}
2. \mathcal{R} , die Vektoren des Raumes als VR über \mathbb{R}
3. Die Punkte der Gauss'schen Ebene als VR über \mathbb{C}
4. $\mathbb{R}^3 = \mathbb{M}^{3 \times 1}(\mathbb{R})$, alle Tripel von reellen Zahlen als VR über \mathbb{R} :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad -3 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ -21 \end{pmatrix}$$

5. Analog zu 4.: \mathbb{R}^4 , alle Quadrupel von reellen Zahlen als VR über \mathbb{R}
6. Analog zu 4.: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, also ist \mathbb{R} selber ein VR über \mathbb{R}
7. Allgemein: k^n ist ein VR über k . Beispiel: $(\mathbb{Z}_5)^3$ als VR über \mathbb{Z}_5
8. $\mathbb{M}^{n \times m}(k)$ ist ein VR über k mit der externen Multiplikation $\lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda \cdot a_{ij})$
9. Spezialfall von 8.: $\mathbb{M}^{3 \times 3}(\mathbb{Q})$, alle quadratischen Matrizen der Kantenlänge 3 über $k = \mathbb{Q}$
10. Spezialfall von 9.: $\text{MQ}_3(\mathbb{Q})$, alle magischen Quadrate der Kantenlänge 3. Zeigen Sie, dass Summen und Vielfache von magischen Quadraten wieder magisch sind!

11. Spezialfall von 10.: $SMQ_3(\mathbb{Q})$, alle supermagischen Quadrate der Kantenlänge 3, das sind diejenigen, bei denen auch die Summen der beiden Diagonalen mit den Zeilen- und Spaltensummen übereinstimmen:



12. Die Menge aller Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bilden einen VR über \mathbb{R} mit den Definitionen:

$$(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda * f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

13. Spezialfall von 12.: Die Menge der auf einem Intervall $[a, b]$ differenzierbaren Funktionen

14. Die Menge aller Zahlfolgen (a_n) über $k = \mathbb{R}$:

$$(a_n) := 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \dots$$

$$(b_n) := 16 \quad 8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 1/2 \quad 1/4 \quad 1/8 \dots$$

$$(a_n) \oplus (b_n) = 17 \quad 9 \quad 6 \quad 5 \quad 6 \quad 8.5 \quad 13.25 \quad 21.125 \dots$$

15. Die Menge aller Fibonacci-Folgen über irgendeinem Zahlkörper

16. $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, die Menge aller Polynome vom Grad $\leq n$ über \mathbb{R}

17. $\mathbb{P}_n(k)$, wie 16., aber über einem beliebigen Zahlkörper k

18. Die Menge der Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung ...

Einige kleine Aufgaben zum VR $\mathbb{P}_3(\mathbb{Z}_5)$:

1. Wieviele Vektoren gibt es in diesem VR?
2. Geben Sie eine **Gerade** an, die durch den Nullpunkt geht!
3. Geben Sie noch eine Gerade an, die **nicht** durch den Nullpunkt verläuft.
4. Was ist ganz allgemein eine **Gerade** in einem VR?
5. Was ist ganz allgemein eine **Ebene** in einem VR?
6. Wieviele Punkte liegen auf einer Ebene in $\mathbb{P}_3(\mathbb{Z}_5)$?

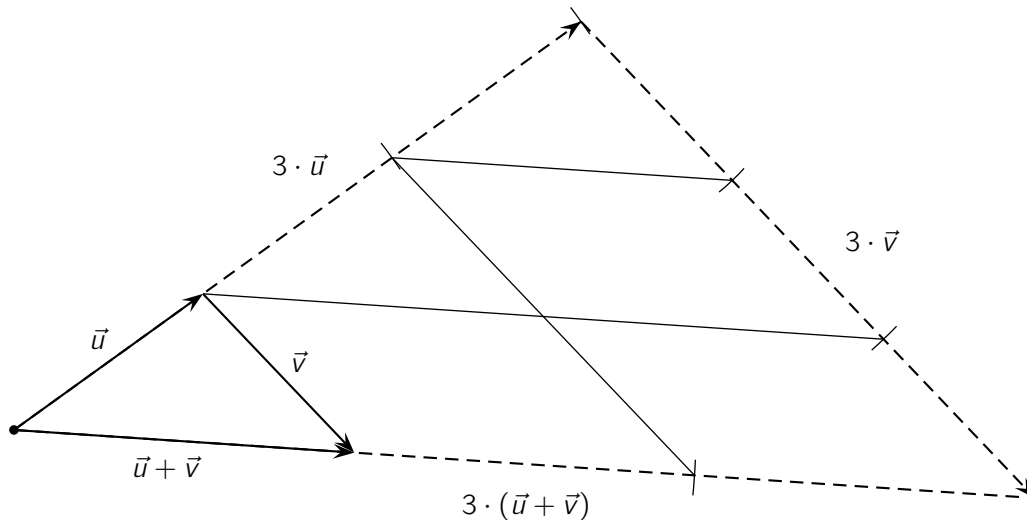
„Melancholia I“ von Albrecht Dürer (1514)



Für Dürer liegen mathematisches Forschen und melancholisches Grübeln offenbar gefährlich nahe beieinander ...

Nun möchten wir noch zeigen, dass in den Axiomen i) bis viii) für Vektorräume praktisch die ganze Geometrie drinsteckt. Sie werden sich dann nicht mehr wundern, dass VRe derart nützlich sind und eine breite Anwendung erlauben.

Wir nehmen zwei beliebige (aber nicht parallele) Vektoren \vec{u} und \vec{v} in der euklidischen Ebene \mathcal{E} und dazu zum Beispiel noch den Zahlfaktor $\lambda = 3$. Nun fertigen wir eine Zeichnung an zum Axiom vii):



$$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$$

Das Axiom vii) verlangt also nichts anderes, als dass die Multiplikation mit einer Zahl λ den Regeln einer zentrischen Streckung genügt, dass also die *Strahlensätze* gelten sollen!

Aus den Strahlensätzen und dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck folgen aber sofort die *Ähnlichkeitssätze* für Dreiecke, die ich gerne abkürze mit SSS, SWS, W(S)W und SsW.

Aufgabe:

Zeigen Sie noch, wie aus dem Ähnlichkeitssatz W(S)W und dem Satz von der Winkelsumme fast sofort die Satzgruppe des Pythagoras abgeleitet werden kann.