A4 - 1

(A4) Kleiner Exkurs: Der Teilerverband einer natürlichen Zahl

T_n soll die Menge aller Teiler von $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen.

Beispiele:

$T_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$T_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ *)

$T_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

Welche Operationen könnten in T_n die Rolle von $\cap$ und $\cup$ übernehmen ??

$\Longrightarrow$ $\operatorname{ggT}(a, b)$ und $\operatorname{kgV}(a, b)$!

Wer hat die Rolle der Neutralelemente ? (Gesetze (4), (5))

$\Longrightarrow$ $G \mathrel{\hat=} n$; $\emptyset \mathrel{\hat=} 1$

Aufgabe: Prüfen Sie, ob (1), (2), (3), (4), (5), (7) und (8) gültig sind !!

Lösung:

(1) und (2) logo ! ✓✓

(3) nicht trivial, aber ✓

(4) $\operatorname{ggT}(k, n) = k$, $\operatorname{kgV}(k, 1) = k$ ✓✓

(5) $\operatorname{ggT}(k, 1) = 1$, $\operatorname{kgV}(k, n) = n$ ✓✓

(7) $\operatorname{ggT}(k, k) = k$, $\operatorname{kgV}(k, k) = k$ ✓✓

(8) $\operatorname{ggT}(k, \operatorname{kgV}(k, \ell)) = k$

$\operatorname{kgV}(k, \operatorname{ggT}(k, \ell)) = k$ ✓✓

Bei den weiteren Gesetzen (6), (9) und (10) brauchen wir etwas Entsprechendes zur Negation !? Vorschlag ?

*) 'schöne' Darstellung von T_{36} ?! → weiter hinten !

Haben Sie noch einen Vorschlag für eine 'Negation' oder die Bildung eines 'Komplements' ?

Also eine Entsprechung zu NOT(A) resp. $\overline{A}$??

Es sollten wenn möglich die Sätze ⑥, ⑨ und ⑩ erfüllt sein:

⑥ $\operatorname{ggT}(a, \bar{a}) = 1$?

$\operatorname{kgV}(a, \bar{a}) = n$

⑨ $\overline{\operatorname{ggT}(a,b)} = \operatorname{kgV}(\bar{a}, \bar{b})$?

$\overline{\operatorname{kgV}(a,b)} = \operatorname{ggT}(\bar{a}, \bar{b})$

⑩ $\bar{\bar{a}} = a$?

Idee: Wir definieren für alle $a \in T_n$

$$\bar{a} := n \operatorname{div} a = \frac{n}{a} = b \quad \text{mit} \quad a \cdot b = n$$

Gelten nun ⑩, ⑨ und ⑥ ??

⑩ $\bar{\bar{a}} = \bar{b}$ mit $a \cdot b = n$

und $\bar{b} = a$ wegen $a \cdot b = n$ ✓✓

⑨ Die beiden Sätze von deMorgan sind erfüllt !!

(→ separates Blatt A4-3 !) ✓✓

⑥ Mit dem Beispiel $a = 5$ in $T_{25} = \{1, 5, 25\}$ lässt sich zeigen, dass ⑥ i.A. nicht erfüllt ist:

$\bar{5} = 25 \operatorname{div} 5 = 5$, also

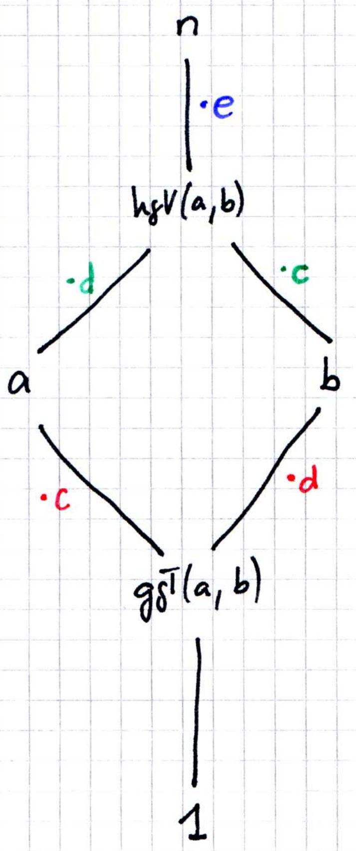
$\operatorname{ggT}(5, \bar{5}) = \operatorname{ggT}(5,5) = 5 \neq 1$

$\operatorname{kgV}(5, \bar{5}) = \operatorname{kgV}(5,5) = 5 \neq 25 = n$

A4-3

Gültigkeit der Gesetze von de Morgan in T_n, wenn definiert wird $\bar{a} := n \operatorname{div} a$, also $\bar{a} = b$ mit $a \cdot b = n$

Betrachte die folgende Substruktur:



i) Es ist $a = c \cdot ggT(a,b)$
$b = d \cdot ggT(a,b)$

wobei $ggT(c,d) = 1$!

ii) Also gilt
$kgV(a,b) = ggT(a,b) \cdot c \cdot d$
$= a \cdot d = b \cdot c$!

iii) Somit $\bar{a} = n \operatorname{div} a = e \cdot d$
und $\bar{b} = n \operatorname{div} b = e \cdot c$
wo $ggT(c,d) = 1$ immer noch

Nun können wir mit diesen Bezeichnern die Gesetze von de Morgan direkt prüfen:

(a) $\overline{ggT(a,b)} = c \cdot d \cdot e$

$kgV(\bar{a}, \bar{b}) = kgV(e \cdot d, e \cdot c) = e \cdot d \cdot c$ da $ggT(c,d) = 1$

$\overline{kgV(a,b)} = n \operatorname{div} (ggT(a,b) \cdot c \cdot d) = e$

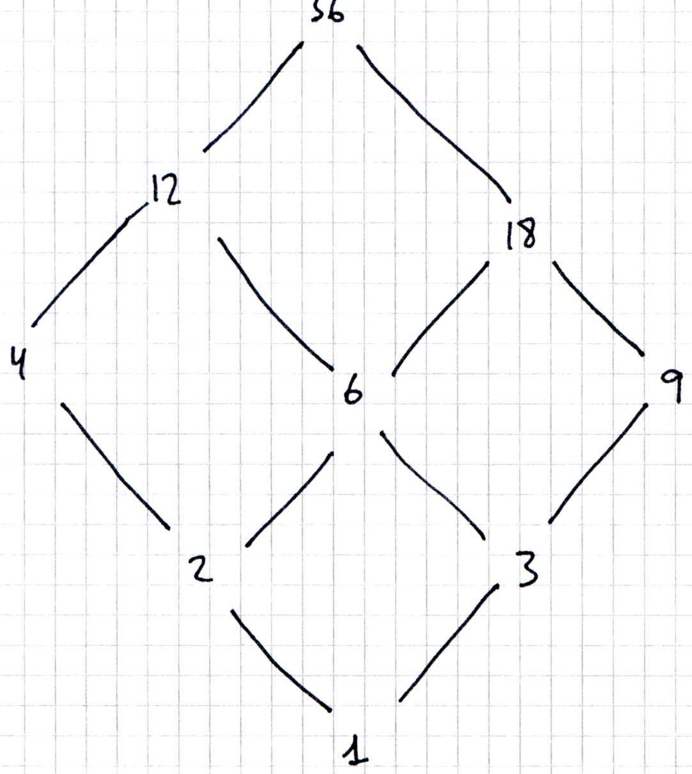
$ggT(\bar{a}, \bar{b}) = ggT(d \cdot e, c \cdot e) = e$ da $ggT(c,d) = 1$

$\square$

((Nebenbei gilt noch: $ggT(a,b) \cdot kgV(a,b) = a \cdot b$ *)
Die Multiplikation $a \cdot b$ kann aber aus T_n hinausführen !!

*) $ggT(a,b) \cdot kgV(a,b) = ggT(a,b) \cdot ggT(a,b) \cdot c \cdot d = [ggT(a,b) \cdot c] \cdot [ggT(a,b) \cdot d]$
$= a \cdot b$))

Π_{36} :

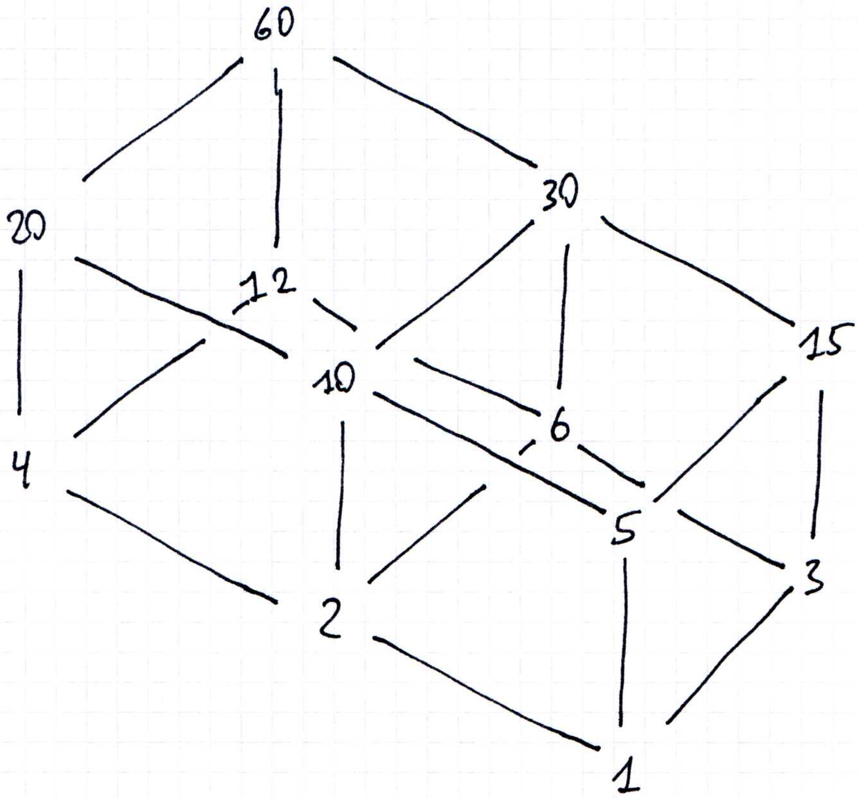


$\uparrow$ kgV

$\downarrow$ ggT

Π_{60} : ?? 3d !!

T_{60} :



bei mehr als 3 Primfaktoren gilt das nicht mehr ...