1 Aussageformen

Definition: Eine Aussage im Sinne der Logik ist ein formulierter Tatbestand, der sich eindeutig als wahr oder falsch bewerten lässt.

Definition: Eine Aussageform $\mathcal{A}$ ist ein Satz, der eine Variable enthält. Wird die Variable durch ein Element einer Grundmenge $\mathbb{G}$ ersetzt, so entsteht eine Aussage.

Bemerkung: Die Grundmenge $\mathbb{G}$ muss genau festgelegt werden, um undefinierte Situationen zu vermeiden.

Jede Aussageform $\mathcal{A}$ definiert eine Teilmenge $\mathbb{A} \subset \mathbb{G}$ aller Elemente von $\mathbb{G}$, die $\mathcal{A}$ zu einer wahren Aussage machen.
Aussageformen stehen also immer im Zusammenhang mit Teilmengen der Grundemenge $\mathbb{G}$.

2 Logische Verknüpfungen

Durch sogenannte *logische Verknüpfungen* (auch: *logische Operatoren*) lassen sich aus bekannten Aussagen neue Aussagen erzeugen.

2.1 Einstellige Verknüpfungen

Es gibt die folgenden elementaren Verknüpfungen:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	**NOT**($\mathcal{A}$)	**TRUE**	**FALSE**
w				
f				
Mengendiagramm				
Mengenbezeichnung				

2.2 Zweistellige Verknüpfungen

Durch weitere logische Operatoren lassen sich zwei Aussageformen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ verknüpfen.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ **AND** $\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ **OR** $\mathcal{B}$	**NOT**($\mathcal{A}$) **AND** $\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ **XOR** $\mathcal{B}$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				
$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$				

($\mathcal{A}$ **XOR** $\mathcal{B}$) $=$

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ **NAND** $\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ **NOR** $\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ **EQUI** $\mathcal{B}$
w	w			
w	f			
f	w			
f	f			
$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$			

($\mathcal{A}$ **NAND** $\mathcal{B}$) $=$

($\mathcal{A}$ **NOR** $\mathcal{B}$) $=$

($\mathcal{A}$ **EQUI** $\mathcal{B}$) $=$

2.3 Übersicht über alle zweistelligen Verknüpfungen

Zu zwei Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt es insgesamt 16 logische Verknüpfungen:
TRUE, FALSE, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, NOT($\mathcal{A}$), NOT($\mathcal{B}$), $\mathcal{A}$ AND $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ OR $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ AND NOT($\mathcal{B}$), $\mathcal{B}$ AND NOT($\mathcal{A}$), $\mathcal{A}$ OR NOT($\mathcal{B}$), $\mathcal{B}$ OR NOT($\mathcal{A}$), $\mathcal{A}$ XOR $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ NAND $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ NOR $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ EQUI $\mathcal{B}$

Diese lassen sich mit der folgenden Wahrheitstabelle systematisch darstellen.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	f	f	f	f	f	f	f	f
w	f	w	w	w	w	f	f	f	f	w	w	w	w	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	w	w	f	f	w	w	f	f	w	w	f	f
f	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f

Aufgaben:

1. Ordne die logischen Verknüpfungen den Spalten der Wahrheitstabelle zu.
2. Ergänze jede Verknüpfung durch die zugehörige Mengenschreibweise und ein Mengendiagramm.

3 Rechenregeln für logische Operatoren

3.1 AND, OR und NOT

Für die logischen Operatoren **AND**, **OR** und **NOT** gelten die folgenden Rechengesetze:

---

1. **Kommutativgesetze**

   $\mathcal{A}$ AND $\mathcal{B} = \mathcal{B}$ AND $\mathcal{A}$
   $\mathcal{A}$ OR $\mathcal{B} = \mathcal{B}$ OR $\mathcal{A}$

---

2. **Assoziativgesetze**

   $\mathcal{A}$ AND ($\mathcal{B}$ AND $\mathcal{C}$) = ($\mathcal{A}$ AND $\mathcal{B}$) AND $\mathcal{C}$
   $\mathcal{A}$ OR ($\mathcal{B}$ OR $\mathcal{C}$) = ($\mathcal{A}$ OR $\mathcal{B}$) OR $\mathcal{C}$

---

3. **Distributivgesetze**

   $\mathcal{A}$ AND ($\mathcal{B}$ OR $\mathcal{C}$) = ($\mathcal{A}$ AND $\mathcal{B}$) OR ($\mathcal{A}$ AND $\mathcal{C}$)
   $\mathcal{A}$ OR ($\mathcal{B}$ AND $\mathcal{C}$) = ($\mathcal{A}$ OR $\mathcal{B}$) AND ($\mathcal{A}$ OR $\mathcal{C}$)

---

4. **Neutralelemente**

   $\mathcal{A}$ AND **TRUE** = $\mathcal{A}$
   $\mathcal{A}$ OR **FALSE** = $\mathcal{A}$

---

5. **Dominanzgesetze**

   $\mathcal{A}$ AND **FALSE** = **FALSE**
   $\mathcal{A}$ OR **TRUE** = **TRUE**

---

6. **Komplementäres Element**

   $\mathcal{A}$ AND **NOT**($\mathcal{A}$) = **FALSE**
   $\mathcal{A}$ OR **NOT**($\mathcal{A}$) = **TRUE**

Ist x ein Element und $*$ eine Verknüpfung, dann heisst x *idempotent*, wenn $x * x = x$.

7. **Idempotenzgesetze**

   $\mathcal{A}$ AND $\mathcal{A} = \mathcal{A}$
   $\mathcal{A}$ OR $\mathcal{A} = \mathcal{A}$

---

8. **Absorptionsgesetze**

   $\mathcal{A}$ AND ($\mathcal{A}$ OR $\mathcal{B}$) = $\mathcal{A}$
   $\mathcal{A}$ OR ($\mathcal{A}$ AND $\mathcal{B}$) = $\mathcal{A}$

---

9. **Gesetze von de Morgan**
   NOT($\mathcal{A}$ AND $\mathcal{B}$) = NOT($\mathcal{A}$) OR NOT($\mathcal{B}$)
   NOT($\mathcal{A}$ OR $\mathcal{B}$) = NOT($\mathcal{A}$) AND NOT($\mathcal{B}$)

---

10. **Doppelte Negation**
    NOT(NOT($\mathcal{A}$)) = $\mathcal{A}$

Die Gesetze lassen sich durch das Aufstellen der entsprechenden Wahrheitstabellen beweisen.

Z.B. *Assoziativgesetz*

$\longrightarrow$ für AND:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B}$ AND $\mathcal{C}$	$\mathcal{A}$ AND ($\mathcal{B}$ AND $\mathcal{C}$)	$\mathcal{A}$ AND $\mathcal{B}$	($\mathcal{A}$ AND $\mathcal{B}$) AND $\mathcal{C}$
w	w	w				
w	w	f				
w	f	w				
w	f	f				
f	w	w				
f	w	f				
f	f	w				
f	f	f				

$\longrightarrow$ für OR:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B}$ OR $\mathcal{C}$	$\mathcal{A}$ OR ($\mathcal{B}$ OR $\mathcal{C}$)	$\mathcal{A}$ OR $\mathcal{B}$	($\mathcal{A}$ OR $\mathcal{B}$) OR $\mathcal{C}$
w	w	w				
w	w	f				
w	f	w				
w	f	f				
f	w	w				
f	w	f				
f	f	w				
f	f	f				

3.2 NAND, NOR und NOT

Aufgabe:
Schreibe die Rechengesetze 1.-3. und 9. auch für **NAND**, **NOR** auf und **NOT** und prüfe ihre Gültigkeit. Passe die rechte Seite der Rechengesetze 4.-8. an.

1. **Kommutativgesetze**

2. **Assoziativgesetze**

3. **Distributivgesetze**

4. **Neutralelemente**

5. **Dominanzgesetze**

6. **Komplementäres Element**

7. **Idempotenzgesetze**

8. **Absorptionsgesetze**

9. **Gesetze von de Morgan**

3.3 XOR, EQUI und NOT

Aufgabe:
Schreibe die Rechengesetze 1.-3. und 9. auch für **XOR**, **EQUI** und **NOT** auf und prüfe ihre Gültigkeit. Passe die rechte Seite der Rechengesetze 4.-8. an.

---

1. **Kommutativgesetze**

---

2. **Assoziativgesetze**

---

3. **Distributivgesetze**

---

4. **Neutralelemente**

---

5. **Dominanzgesetze**

---

6. **Komplementäres Element**

7. **Idempotenzgesetze**

8. **Absorptionsgesetze**

9. **Gesetze von de Morgan**

4 Anhang: Wahrheitstabellen

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$					
w	w	w					
w	w	f					
w	f	w					
w	f	f					
f	w	w					
f	w	f					
f	f	w					
f	f	f					

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$					
w	w	w					
w	w	f					
w	f	w					
w	f	f					
f	w	w					
f	w	f					
f	f	w					
f	f	f					

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$					
w	w	w					
w	w	f					
w	f	w					
w	f	f					
f	w	w					
f	w	f					
f	f	w					
f	f	f					

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$					
w	w	w					
w	w	f					
w	f	w					
w	f	f					
f	w	w					
f	w	f					
f	f	w					
f	f	f					

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$					
w	w	w					
w	w	f					
w	f	w					
w	f	f					
f	w	w					
f	w	f					
f	f	w					
f	f	f					

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$					
w	w	w					
w	w	f					
w	f	w					
w	f	f					
f	w	w					
f	w	f					
f	f	w					
f	f	f					

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$					
w	w	w					
w	w	f					
w	f	w					
w	f	f					
f	w	w					
f	w	f					
f	f	w					
f	f	f					

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$					
w	w	w					
w	w	f					
w	f	w					
w	f	f					
f	w	w					
f	w	f					
f	f	w					
f	f	f					