A1 - 1 Aussagen und Aussageformen

Definitionen, zur Bedeutung der Grundmenge

- Eine Aussage ist ein Satz mit einem eindeutig bestimmten Wahrheitsgehalt: w oder f
  zB. "Ralf ist männlich"

- Eine Aussageform ist ein Satz, der eine Variable enthält. Wird diese Variable durch ein beliebiges Element einer zugrundegelegten (vereinbarten!) Grundmenge G ersetzt, so muss eine Aussage entstehen.
  & Schülerinnen
  $\mathfrak{A}$ = "x ist männlich", Grundmenge G: Alle Schüler der Klasse
  zB. wird "Jasmin ist männlich" zu einer (falschen) Aussage.

- Es ist wichtig, dass eine Grundmenge G spezifiziert wird, weil sonst undefinierte Situationen entstehen können:
  Setzen Sie für x in $\mathfrak{A}$ eine bestimmte Schnecke 'Karl' ein.
  Diese sind bekanntlich Zwitter.

- Jede Aussageform $\mathfrak{A}$ definiert die ~~Men~~ Teilmenge $A \subset G$ all derjenigen Elemente von G, welche $\mathfrak{A}$ zu einer <u>wahren</u> Aussage machen.
  Zu $\mathfrak{A}$ gehört also als 'Lösungsmenge' die Menge A aller Knaben in der Klasse.

- Aussageformen und Teilmengen von G gehören also eng zusammen.

AZ – 1 Logische Operatoren

Mit den Wörtern UND, ODER, NICHT, ENTWEDER ... ODER usw. kann man aus Aussagen und Aussageformen weitere Aussagen respektive Aussageformen bilden.
Man spricht von "logischen Verknüpfungen" oder "logischen Operatoren".

Wir studieren zuerst die Negation, also den logischen Operator NICHT (english: NOT), welcher nur 1 Argument braucht:

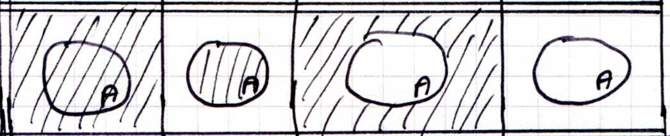
$\mathfrak{A}$	NOT($\mathfrak{A}$)
w	f
f	w

Diese Tabelle definiert die Bedeutung des Operators NOT(..). Es gilt der Satz:

$$NOT(NOT(\mathfrak{A})) = \mathfrak{A}$$

Eine Tabelle mit 2 Einträgen kann man aber prinzipiell auf $2^2 = 4$ Arten ausfüllen. Entsprechend gibt es 4 mögliche 1-stellige Operatoren:

$\mathfrak{A}$	TRUE	$\mathfrak{A}$	NOT($\mathfrak{A}$)	FALSE
w	w	w	f	f
f	w	f	w	f
Mengendiagramm				
Menge	G	A	$\bar{A}$	$\emptyset$



*)

$\bar{A} = G \setminus A$

$\bar{A}$ heisst auch die 'Komplementmenge von A in G'

Die Operatoren TRUE und FALSE ignorieren den Input $\mathfrak{A}$!

$$A = \{x \in G \mid \mathfrak{A}(x) \text{ ist wahr}\}$$

A2-2

logisch, mengentheoretisch und schaltungsmässig wird es interessanter, wenn wir 2 Input-leitungen verknüpfen (resp. 2 Mengen, resp. 2 Aussagen oder Aussageformen). Wir machen zuerst einige Beispiele, bevor wir die systematische Tabelle aller möglichen 2-stelligen Verknüpfungen studieren.

G alle Schülerinnen und Schüler der 3ms
A "x ist männlich"
B "y ist trägt in diesem Moment eine Brille"

A	B	A AND B	A OR B	A XOR B	NOT(A) AND B	....
w	w	w	w	f	f	
w	f	f	w	w	f	
f	w	f	w	w	w	
f	f	f	f	f	f	
						*)
A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$	$B \setminus A$	

*) die Betroffenen sollen jeweils aufstehen ...

Bei 2 Input-leitungen gibt es also $2 \cdot 2 = 4$ verschiedene Kombinationen der Inputs. Auf wieviele Arten kann man eine Spalte der Länge 4 mit den Werten w oder f besetzen?

Es gibt $2^4 = 16$ Möglichkeiten, also werden wir 16 mögliche zweistellige Operatoren studieren (→ A5).

Vorher überlegen wir uns noch, welche Regeln für die Operatoren NOT, AND und OR gelten.

A3 - 1

Für die logischen Operationen AND, OR und NOT gelten die folgenden Rechengesetze:

① Kommutativgesetze
A AND B = B AND A
A OR B = B OR A

② Assoziativgesetze
wann ist das jeweils wahr?
A AND (B AND C) = (A AND B) AND C
A OR (B OR C) = (A OR B) OR C

③ Distributivgesetze
Beweis/Test mit Tabelle!
A AND (B OR C) = (A AND B) OR (A AND C)
A OR (B AND C) = (A OR B) AND (A OR C)

④ Neutralelemente
A AND TRUE = A
A OR FALSE = A

⑤ Dominanzgesetze
!
A OR TRUE = TRUE
A AND FALSE = FALSE

⑥ Komplementäres Element
A AND NOT(A) = FALSE
A OR NOT(A) = TRUE

⑦ Idempotenzgesetze
A AND A = A
A OR A = A

⑧ Absorptionsgesetze
A AND (A OR B) = A
A OR (A AND B) = A

⑨ Gesetze von de Morgan
NOT (A AND B) = NOT(A) OR NOT(B)
NOT (A OR B) = NOT(A) AND NOT(B)

⑩ Doppelte Negation : NOT(NOT(A)) = A

Alle diese Gesetze lassen sich leicht durch das Aufstellen der entsprechenden Wahrheitstafeln beweisen.
Es sind die Gesetze der Boole'schen Algebra (George Boole, 1847).

Wir notieren sie noch ein 2. Mal in der Mengensprache.

⑩ enth. noch NOT(NOT(A)) = A

A3-2

(1) Kommutativgesetze $$A \cap B = B \cap A$$ $$A \cup B = B \cup A$$

(2) Assoziativgesetze $$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$ $$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

(3) Distributivgesetze $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$ $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(4) Neutralelemente $$A \cap G = A$$ $$A \cup \emptyset = A$$

(5) Dominanzgesetze $$A \cap \emptyset = \emptyset$$ $$A \cup G = G$$

(6) Komplementäres Element $$A \cap \overline{A} = \emptyset$$ $$A \cup \overline{A} = G$$

(7) Idempotenzgesetze $$A \cap A = A$$ $$A \cup A = A$$

(8) Absorptionsgesetze $$A \cap (A \cup B) = A$$ $$A \cup (A \cap B) = A$$

(9) Gesetze von de Morgan $$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$ $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Wir veranschaulichen einige dieser Gesetze mit Mengendiagrammen:

zB. (3), (6), (8), (9)!

(siehe auch p. 28 ff von Feuerpfeil/Heigl, Wahrscheinlichkeitsrechnung, bsv)

?? Kennen Sie ähnliche Gesetze in einem anderen Zusammenhang ??

? Wie würden die beiden Distributivgesetze für + und · lauten ?

Evtl. noch ergänzen: (10) $\overline{\overline{A}} = A$ Negationsgesetz

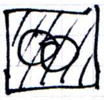
A5 Alle zweistelligen logischen Operationen

Wir haben in A2 schon bemerkt, dass es zu 2 Aussagen A und B insgesamt 16 mögliche Verknüpfungen gibt. Diese wollen wir hier systematisch untersuchen:

A	B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	f	f	f	f	f	f	f	f
w	f	w	w	w	w	f	f	f	f	w	w	w	w	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	w	w	f	f	w	w	f	f	w	w	f	f
f	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f

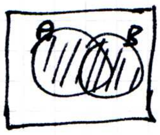
(1) Der Input A, B wird ignoriert, der Output ist immer TRUE

Mengenmäßig: G



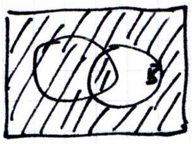
G

(2) Dies ist A OR B, im Mengendiagramm



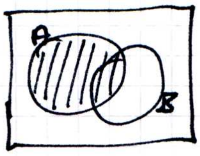
$A \cup B$

(3) Das wäre A OR NOT(B), im Mengendiagramm



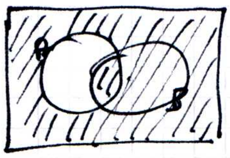
$A \cup \overline{B}$

(4) Das ist einfach A, B wird ignoriert.



A

(5) Das ist B OR NOT(A) (vgl. mit (3)!) im Mengenbild



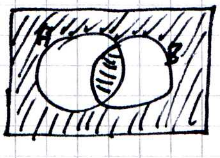
$B \cup \overline{A}$

(6) Das ist einfach B, A wird ignoriert

B

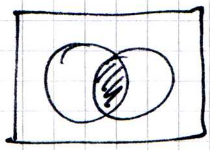
(7) Das ist die Äquivalenz von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ — $\mathcal{A}$ EQUI $\mathcal{B}$! $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind immer beide wahr oder beide falsch, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ AND $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$ ...

Im Mengenbild:



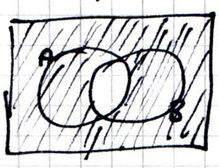
$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$

(8) Das ist ~~xxxx~~ $\mathcal{A}$ AND $\mathcal{B}$, im Mengenbild



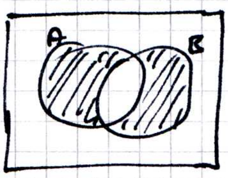
$A \cap B$

(9) Das ist NOT($\mathcal{A}$ AND $\mathcal{B}$) $\stackrel{\text{def}}{=}$ $\mathcal{A}$ NAND $\mathcal{B}$



$G \setminus (A \cap B) = \bar{A} \cup \bar{B}$

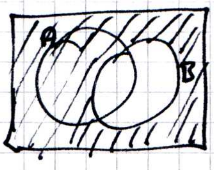
(10) Das ist das Entweder-Oder: $\mathcal{A}$ XOR $\mathcal{B}$ ('exclusive or')



$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ oder

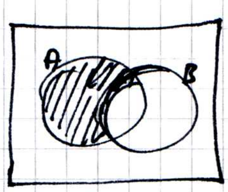
$(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

(11) ? Das ist einfach NOT($\mathcal{B}$), $\mathcal{A}$ wird ignoriert!



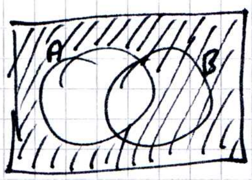
$\bar{B} = G \setminus B$

(12) ? Das ist $\mathcal{A}$ AND NOT($\mathcal{B}$)



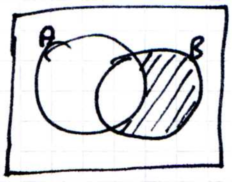
$A \cap \bar{B}$
$= A \setminus B$

(13) ? Das ist NOT($\mathcal{A}$), $\mathcal{B}$ wird ignoriert:



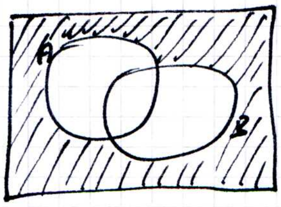
$\bar{A} = G \setminus A$

(14) Das ist z.B. B AND NOT(A)



$B \cap \overline{A} = B \setminus A$

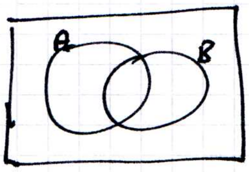
(15) Das ist NOT(A OR B) $\overset{def}{=}:$ A NOR B



~ weder A noch B
~ ni A ni B

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(16) Das ist FALSE, die Eingabe-Argumente A und B werden ignoriert



$\emptyset$

Von den nicht-trivialen Operationen benötigen wir im folgenden

einstellig: NOT

zweistellig: AND, OR, XOR
NAND, NOR, EQUI

Es ist

(A NAND B) = NOT(A AND B)
(A NOR B) = NOT(A OR B)
(A EQUI B) = NOT(A XOR B) !!

Aufgabe: Wir haben die Gesetze der Boole'schen Algebra für das Paar AND / OR und NOT geprüft.
Welche gelten auch für das Paar NAND / NOR und NOT ?
Welche gelten für das Paar XOR / EQUI und NOT ??

Lösung der Aufgabe für NAND/NOR und NOT

Übungsaufgabe!

(1) ✓✓

(2) (A NAND B) NAND C ist genau dann wahr, wenn mind. 1 falsch ist...
(A NOR B) NOR C ist genau dann wahr, wenn alle 3 falsch sind ✓✓

(3) A NAND (B NOR C) ist wahr, wenn A falsch ist oder (B NOR C) falsch ist, also wenn A f or B w or C w
(A NAND B) NOR (A NAND C) ist nur wahr, wenn beide Klammern falsch sind, also wenn A f ist (→ beide () wahr

A	B	C	B NOR C	A NAND (B NOR C)	A NAND B	A NAND C	(A NAND B) NOR (A NAND C)
w	w	w	f	w	f	f	w
w	w	f	f	w	f	w	f
w	f	w	f	w	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w	f
f	w	w	f	w	w	w	f
f	w	f	f	w	w	w	f
f	f	w	f	w	w	w	f
f	f	f	w	w	w	w	f

nicht dieselbe!

(4) A NAND TRUE = NOT(A) !!
A NOR ~~FALSE~~ = ~~FALSE~~ NOT(A) !! //

(5) A NAND FALSE = TRUE = NOT(FALSE)
A NOR TRUE = FALSE = NOT(TRUE)

(6) A NAND NOT(A) = TRUE
A NOR NOT(A) = FALSE //

(7) A NAND A = NOT(A)
A NOR A = NOT(A)

viele fühlen gerade irritiert...

(8) A NAND (A NOR B) = TRUE
A NOR (A NAND B) = FALSE

(9) NOT(A NAND B) = A AND B =
NOT(A) NOR NOT(B) = NOT(NOT(A) OR NOT(B)) = NOT(NOT(A AND B)) = A AND B ✓✓

AS-5

Lösung der Aufgabe für XOR/EQUI und NOT

Übungsaufgabe!

① ✓✓

② A XOR (B ~~EQUI~~ XOR C) ist wahr, falls w w w, w f f, f w f, f f w
(A XOR B) XOR C ist wahr, falls w f f, f w f, w w w, f f w) ✓✓

A EQUI (B EQUI C) ist wahr: w w w, w f f, f w f, f f w
(A EQUI B) EQUI C) ist wahr: w w w, f f w, w f f, f w f) ✓✓

③

A	B	C	A XOR B	A XOR C	... EQUI ...	B EQUI C	A XOR (B EQUI C)
w	w	w	f	f	w	w	f
w	w	f	f	w	f	f	w
w	f	w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	w	w	w	f
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	f	w	f	f	f
f	f	f	f	f	w	w	w

≠ !

④ A XOR TRUE = NOT(A)
A EQUI FALSE = NOT(A) !!

⑤ A XOR FALSE = NOT(A) !!
A EQUI FALSE = NOT(A)

⑥ A XOR NOT(A) = TRUE
A EQUI NOT(A) = FALSE (✓✓)

⑦ A XOR A = FALSE //
A EQUI A = TRUE // !!

⑧ A XOR (A EQUI B) = NOT(B)
A EQUI (A XOR B) = NOT(B) !!

⑨ NOT(A XOR B) = ~~...~~ A EQUI B
~~NOT~~ NOT(A) EQUI NOT(B) = A EQUI B)) !✓✓

Die obigen Gesetze gelten also ebenso !!:
für alle Paare in ① und ② !